

---

**Computerondersteund modelleren  
Natuurkunde**

**Lesactiviteiten**

**Universiteit Utrecht**

**FI** Freudenthal Instituut

**Computerondersteund modelleren**  
**Natuurkunde**  
**Lesactiviteiten**  
**Voorbeeldmateriaal**

Koos Kortland

© 2017 Freudenthal Instituut (FI), Universiteit Utrecht

Deze publicatie mag in ongewijzigde vorm worden verveelvoudigd en verspreid ten behoeve van niet-commercieel gebruik in het onderwijs, mits met – voor zover van toepassing – bronvermelding van het oorspronkelijke materiaal.

## Inhoud

1	Inleiding	5
2	Radioactief verval	9
3	Tijdrit Tour de France 1989	13
4	Vrije val door de geluidsbarrière	17
5	Het Kanaal over vliegen	19
6	Ingooien	21
7	Planeetbanen	23
8	Zonnezeil	27
9	Planckkrommen	29
10	Broeikaseffect	33
11	Druk en temperatuur in sterren	41
	Bronnen	49



## 1 Inleiding

In deze publicatie is een aantal voorbeelden samengebracht van lesactiviteiten rond computerondersteund modelleren bij natuurkunde. De lesactiviteiten zijn voor een deel ontleend aan de methode *Newton* en de NiNa-module *Wisselwerking en beweging 1* (zie ‘Bronnen’). De voorbeelden zijn niet bedoeld voor ‘leren modelleren’, maar voor iets als ‘toepassing van al geleerd modelleren’. Voor het ‘leren modelleren’ staat in bijvoorbeeld *Newton 4v* in hoofdstuk 6 een paragraaf 6.3 *Dynamische modellen*.

De voorbeelden van lesactiviteiten lopen uiteen van relatief eenvoudig (zoals radioactief verval) tot behoorlijk complex (zoals druk en temperatuur in sterren). Ze illustreren de in figuur 250 van paragraaf 5.5 van het *Handboek natuurkunde-didactiek* genoemde mogelijkheden voor modelleren in de verschillende leerstof-domeinen uit de examenprogramma’s voor havo en vwo. Deze figuur is voor alle volledigheid hieronder als figuur 1 weergegeven.

Subdomein	Activiteit	Modelvergelijkingen
C1 Kracht en beweging (h/v)	Bewegingen onder invloed van een snelheidsafhankelijke (lucht)weerstandskracht	$a = F_{\text{res}}/m$ $dv = a \cdot dt \rightarrow v = v + dv$ $dx = v \cdot dt \rightarrow x = x + dx$ $F_w = k \cdot v^2$
B1 Informatieoverdracht (h/v)	Bewegingen onder invloed van een plaatsafhankelijke (veer)kracht	$a = F_{\text{res}}/m$ $dv = a \cdot dt \rightarrow v = v + dv$ $dx = v \cdot dt \rightarrow x = x + dx$ $F_v = -C \cdot x$
B2 Medische beeldvorming (h/v)	Radioactief verval	$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$
D1 Eigenschappen van stoffen en materialen (h)	Opwarmen en afkoelen	$Q_{\text{in}} = P \cdot dt$ $Q_{\text{uit}} = k \cdot (T_b - T_o) \cdot dt$ $dT_b = (Q_{\text{in}} - Q_{\text{uit}})/C$
E1 Zonnestelsel en heelal (h)	Bewegingen onder invloed van de gravitatiekracht (als een combinatie van bewegingen in de $x$ - en $y$ -richting)	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $F_g = G \cdot M \cdot m/r^2$
C3 Gravitatie (v)		$F_{g,x} = -F_g \cdot x/r \rightarrow a_x \rightarrow dv_x \rightarrow v_x \rightarrow dx \rightarrow x$ $F_{g,y} = -F_g \cdot y/r \rightarrow a_y \rightarrow dv_y \rightarrow v_y \rightarrow dy \rightarrow y$

Figuur 1 – Een mogelijke leerlijn voor modelleren in de bovenbouw havo en vwo. Bron: *Handboek natuurkundedidactiek*, p. 307.

Het uitgangspunt bij alle voorbeelden van lesactiviteiten is dat de leerstof over het betreffende onderwerp bekend is. In de meeste modelleeractiviteiten kunnen de leerlingen zelf kiezen tussen werken met een tekstmodel of een grafisch model.

Een algemeen aandachtspunt is het onderscheid tussen havo en vwo: voor havo-leerlingen gaat het om het kunnen gebruiken van gegeven computermodellen voor het onderzoeken van een verschijnsel, terwijl vwo-leerlingen daarnaast gevraagd kan worden zelf de betreffende computermodellen te ontwerpen, bouwen en testen. In de voorbeelden van lesactiviteiten gaat het vooral om het laatste, maar deze modelleeractiviteiten zijn desgewenst relatief eenvoudig ‘om te bouwen’ naar het eerste.

De voorbeelden van lesactiviteiten hebben betrekking op de hierboven in figuur 1 genoemde leerstofdomeinen C1 (havo/vwo), B2 (havo/vwo), E1 (havo) en C3 (vwo). Daarnaast zijn er ook voorbeelden opgenomen die betrekking hebben op het leerstofdomein E2 (vwo): elektromagnetische straling en materie.

Bij het inzetten van deze modelleeractiviteiten kan het handig zijn om met de

### Computermodellen

De computermodellen bij de lesactiviteiten staan in *Coach6* op de handboekwebsite. Voor een deel van de lesactiviteiten is dat beperkt tot de verder zelf door de leerlingen aan te passen basismodellen van figuur 2 t/m 4 hieronder.

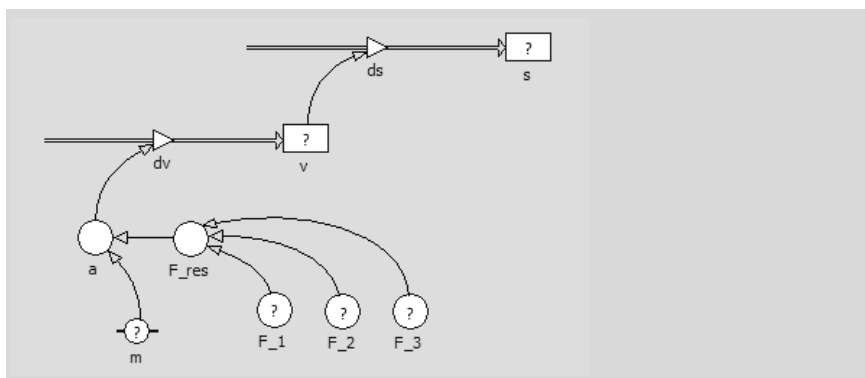
leerlingen aandacht te besteden aan de *modelstructuur* en de *modelleringprocedure*.

### Modelstructuur

In alle grafische modellen zit een basisstructuur van een voorraadgrootheid, gekoppeld aan een in- en/of uitstroomgrootheid. De waarde van deze in- en/of uitstroomgrootheid wordt bepaald door rekengrootheden en constante grootheden en hun onderlinge relaties.

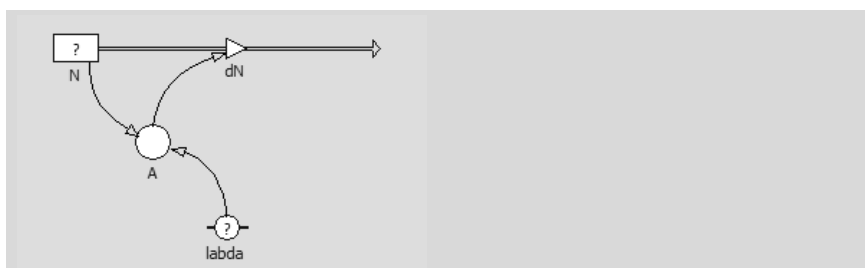
In figuur 2 t/m 4 zijn enkele van deze basisstructuren weergegeven, zowel in de vorm van een tekstmodel als in de vorm van een grafisch model.

$t = t + dt$   
 $F_1 = \dots$   
 $F_2 = \dots$   
 $F_3 = \dots$   
 $F_{res} = F_1 + F_2 + F_3$   
 $a = F_{res}/m$   
 $dv = a \cdot dt$   
 $v = v + dv$   
 $ds = v \cdot dt$   
 $s = s + ds$



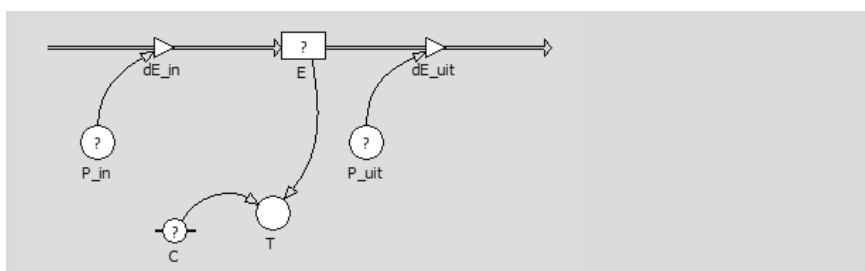
Figuur 2 – Basismodel voor kracht en beweging, met als resulterende kracht  $F_{res} = \Sigma F$  en als versnelling  $a = F_{res}/m$ .

$t = t + dt$   
 $A = \lambda \cdot N$   
 $dN = A \cdot dt$   
 $N = N - dN$



Figuur 3 – Basismodel voor radioactief verval, met als activiteit  $A = \lambda \cdot N$ . Hierin is  $\lambda$  de vervalconstante en  $N$  het aantal instabiele atoomkernen.

$t = t + dt$   
 $P_{in} = \dots$   
 $P_{uit} = \dots$   
 $dE_{in} = P_{in} \cdot dt$   
 $dE_{uit} = P_{uit} \cdot dt$   
 $E = E + dE_{in} - dE_{uit}$   
 $T = E/C$



Figuur 4 – Basismodel voor warmte en temperatuur, met als (absolute) temperatuur  $T = E/C$ . Hierin is  $E$  de 'energie-inhoud' en  $C$  de warmtecapaciteit van een voorwerp.

Bij het grafisch modelleren kan het voor leerlingen lastig zijn om te bepalen welke grootheid de voorraadgrootheid is, en welke grootheid de in- en/of uitstroomgrootheid. In dat geval kan het helpen om te verwijzen naar de achterliggende natuurkunde, die in het tekstmodel wat beter naar voren komt. Als voorbeeld het modelleren in het leerstofdomein 'Kracht en beweging'. De snelheid van een voorwerp is gedefinieerd als  $v = \Delta s / \Delta t$ . Dit is te schrijven als  $\Delta s = v \cdot \Delta t$ . In modeltermen staat hier de verplaatsing  $\Delta s$  als gevolg van een snelheid  $v$  gedurende een tijdstap  $\Delta t$ . De nieuwe plaats  $s$  van het voorwerp (na die tijdstap) volgt dan door bij de oude plaats  $s$  de berekende verplaatsing  $\Delta s$  op te tellen. Dit geeft aan dat de plaats  $s$  de voorraadgrootheid is, en de snelheid  $v$

de instroomgrootheid. In de computermodellen wordt uiteindelijk het symbool  $\Delta$  vervangen door het symbool  $d$ .

In de tabel van figuur 5 zijn de natuurkundige basisvergelijkingen voor de modellen van figuur 2 t/m 4 en de bijbehorende voorraadgrootheid en in- en/of uitstroomgrootheden weergegeven.

Basisvergelijking	Voorraadgrootheid	In- en/of uitstroomgrootheid
$v = \Delta s / \Delta t \rightarrow \Delta s = v \cdot \Delta t$	plaats $s$	snellheid $v$
$a = \Delta v / \Delta t \rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t$	snellheid $v$	versnelling $a$
$A = \Delta N / \Delta t \rightarrow \Delta N = A \cdot \Delta t$	aantal kernen $N$	activiteit $A$
$P = \Delta E / \Delta t \rightarrow \Delta E = P \cdot \Delta t$	energie $E$	vermogen $P$

Figuur 5 – Natuurkundige basisvergelijkingen en de bijbehorende voorraadgrootheid en in- en/of uitstroomgrootheden.

### Modellerprocedure

Bij het modelleren is het handig om volgens een vaste procedure aan het werk te gaan. In het kader hieronder staat in vier grote stappen de procedure die kenmerkend is voor modelleren. Binnen elk van die stappen zijn weliswaar kleinere stappen te onderscheiden. En vaak worden die stappen niet lineair van begin tot eind doorlopen, maar is sprake van enkele keren in een soort lus door de procedure heen lopen. Toch is het handig dat een leerling zich steeds realiseert wat de grote stappen in de procedure zijn en in welke stap hij of zij zich op dat moment bevindt – om het overzicht op het eigen modellerproces te behouden.

**Probleem inperken** – Verschijnselen kunnen heel complex zijn. In dat geval is het verstandig om – zeker in eerste instantie – het probleem in te perken: bewust een aantal vereenvoudigingen aanbrengen, bepaalde grootheden en relaties buiten beschouwing laten, het probleem opdelen in deelproblemen, starten met het oplossen van een van die deelproblemen enzovoort.

**Fysisch model ontwikkelen** – Na de inperking van het probleem ga je op zoek naar de fysische grootheden en relaties die een rol spelen bij het oplossen van het probleem. Daarbij begin je eenvoudig, en bouw je het fysisch model geleidelijk verder uit.

**Computermodel ontwikkelen** – Bij het vertalen van het ontwikkelde fysische model naar een computermodel gebruik je een vergelijkbare strategie: van eenvoudig naar complex. Daarbij doorloop je een aantal malen de ontwikkelcyclus van ontwerpen, bouwen en testen van het computermodel.

Bij het testen van het model (of een deelmodel) gaat het om de vraag of de modelresultaten overeenstemmen met de verwachting. Die vraag moet je steeds vaker uit jezelf stellen – en dan voordat je het model een verschijnsel laat doorrekenen. Dus: eerst de hypothese, dan de controle. Zonder hypothese vooraf constateren dat het model iets doet wat je niet verwacht had blijkt namelijk nogal lastig te zijn. Een ander soort test is natuurlijk het vergelijken van de modelresultaten met meetresultaten, maar dat is lang niet altijd mogelijk.

**Computermodel gebruiken** – Het ontwikkelen van een computermodel heeft niet zoveel zin als je er niets mee doet. Het model wordt dus gebruikt om een verschijnsel te onderzoeken, een ontwerp te optimaliseren of om een probleem op te lossen.

Figuur 6 – Modellerprocedure.

De in figuur 6 weergegeven modellerprocedure is bedoeld voor gebruik door vwo-leerlingen. Voor havo-leerlingen blijft het modelleren namelijk – gezien het betreffende examenprogramma – beperkt tot de laatste stap.

De vier stappen van de modellerprocedure zijn – weliswaar soms met enige moeite – in de voorbeelden van lesactiviteiten wel te herkennen. Dat geeft dan ook een aanknopingspunt voor het desgewenst bewerken van de lesactiviteiten voor gebruik door havo-leerlingen.





## 2 Radioactief verval

Radioactief verval is een toevalsproces. Voor een groot aantal instabiele kernen ontstaat er een bepaalde regelmaat in het verval. Het aantal kernen  $dN$  dat per tijdseenheid  $dt$  vervalst rond het tijdstip  $t$  – ofwel de activiteit  $A$  op het tijdstip  $t$  – is dan recht evenredig met het aantal op dat moment nog aanwezige instabiele kernen  $N$ :

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

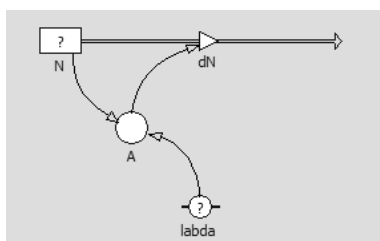
In deze formule is de evenredigheidsconstante  $\lambda$  de *vervalconstante*. Deze vervalconstante zegt iets over de kans op verval van een instabiele atoomkern: hoe groter de vervalconstante is, des te groter is de kans op verval.

De vervalconstante is te berekenen uit de bekende halveringstijd  $t_{1/2}$  van een radioactieve isotoop:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{0,693}{t_{1/2}}$$

Door radioactief verval neemt het aantal instabiele kernen  $N$  af in de loop van de tijd  $t$ . Het verloop van dit proces kun je door de computer laten berekenen. Daarvoor is een computermodel nodig: een aantal modelvergelijkingen waarmee de computer in een bepaalde volgorde de verschillende grootheden in een groot aantal opeenvolgende kleine tijdstappen berekent. Het uitgangspunt bij die berekeningen is een door de startwaarde van een aantal grootheden vastgelegde beginsituatie.

In figuur 1 t/m 3 zie je hetzelfde computermodel voor radioactief verval in drie verschillende vormen: een grafisch model in Coach6, een tekstmodel in Modellus en een tekstmodel in Coach6.



Figuur 1 – Grafisch computermodel voor radioactief verval in Coach6. De activiteit  $A$  wordt berekend met de formule  $A = \text{labda} \cdot N$ . De uitstroom  $dN$  wordt berekend met de formule  $dN = A \cdot dt$ , waarbij het computerprogramma de waarde van  $A$  automatisch vermenigvuldigt met  $dt$ .

rekenregels	
1	labda = ...
2	A = labda*N
3	dN/dt = -A
startwaarde: N = ...	

Figuur 2 – Computermodel voor radioactief verval in Modellus.

rekenregels	startwaarden
1	t = t + dt
2	A = labda*N
3	dN = A*dt
4	N = N - dN
	labda = ...

Figuur 3 – Computermodel voor radioactief verval in Coach6.

De rekenregels in de computermodellen zijn afgeleid van de hierboven gegeven formule voor de activiteit  $A$  van een radioactieve bron. De startwaarden zijn in deze modellen nog niet volledig ingevuld.

De computer slaat het resultaat van alle berekeningen in elk van de tijdstappen op in het geheugen. Daardoor is het resultaat zichtbaar te maken in de vorm van een  $N,t$ -diagram en/of een  $A,t$ -diagram.

- 1 Bouw het computermodel van figuur 1, 2 of 3. Plaats een (leeg)  $N,t$ -diagram in het model. Sla het model op onder de naam *verval\_1*.
  - a Voer de (zelf te kiezen) startwaarden in het computermodel in. Laat het model lopen, en controleer in het  $N,t$ -diagram of het model het radioactief verval juist weergeeft. Ga daarbij onder andere na of de halveringstijd  $t_{1/2}$  overeenstemt met de ingevoerde waarde van de vervalconstante  $\lambda$ .
  - b Onderzoek met het model het effect van een grotere startwaarde van  $N$ .
  - c Onderzoek met het model het effect van een grotere waarde van  $\lambda$  (of een kleinere waarde van  $t_{1/2}$ ).
- 2 Het computermodel van figuur 1, 2 en 3 berekent niet alleen het aantal instabiele kernen  $N$ , maar ook de activiteit  $A$ . Plaats een tweede (leeg)  $A,t$ -diagram in het model. Sla het model op onder de naam *verval\_2*.

- a Verander de (zelf gekozen) startwaarden niet. Laat het model lopen, en controleer in het  $A,t$ -diagram of het model het radioactief verval juist weer-geeft. Ga daarbij onder andere na of de halveringstijden in het  $N,t$ -diagram en het  $A,t$ -diagram hetzelfde zijn, en of de activiteit  $A$  op het tijdstip  $t = 0$  s overeenstemt met de ingevoerde (start)waarden van  $N$  en  $\lambda$ . Voor dat laatste moet namelijk gelden:  $A = \lambda \cdot N$ .
  - b Onderzoek met het model het effect van een grotere startwaarde van  $N$  op de activiteit  $A$ . Trek een conclusie over het verband tussen deze twee groot-heden (bij steeds dezelfde waarde van  $\lambda$  of  $t_{1/2}$ ).
  - c Onderzoek met het model het effect van een grotere waarde van  $\lambda$  (of een kleinere waarde van  $t_{1/2}$ ) op de activiteit  $A$ . Trek een conclusie over het verband tussen deze twee grootheden (bij steeds dezelfde waarde van  $N$ ).
- 3 Leg met behulp van de in opdracht 2 bij vraag b en c gevonden verbanden uit welke van de volgende twee isotopen het meest geschikt is als tracer voor diagnostisch onderzoek naar het functioneren van de schildklier: I-123 met een halveringstijd van 0,5 dag of I-131 met een halveringstijd van 8 dagen.

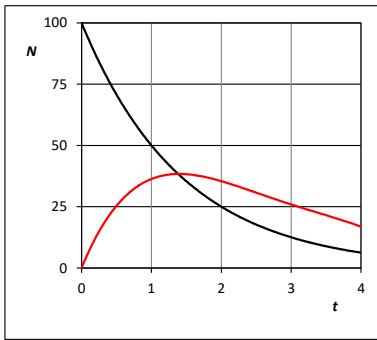
### C-14 in de atmosfeer

In de atmosfeer van de aarde zorgen hoogenergetische protonen uit kosmische straling bij botsing met atoomkernen voor het ontstaan van neutronen. Bij een botsing van zo'n neutron met de stikstofisotoop N-14 ontstaat de koolstofisotoop C-14. Deze koolstofisotoop is radioactief en heeft een halveringstijd van 5730 jaar.

- 4 In de atmosfeer van de aarde is sprake van de vorming en het verval van de koolstofisotoop C-14.
- a Geef de vorming van C-14 in de atmosfeer van de aarde weer in de vorm van een reactievergelijking.
  - b Geef het verval van C-14 in de atmosfeer van de aarde weer in de vorm van een vervalvergelijking.
- 5 Het effect van de vorming en het verval van C-14 in de atmosfeer is te onderzoeken met een computermodel.
- a Ontwerp, bouw en test een computermodel voor het aantal kernen C-14 in de atmosfeer van de aarde in de loop van de tijd. Ga er daarbij van uit dat de vorming van C-14 onder invloed van de kosmische straling in de loop van de tijd constant is. Voor het verval van het gevormde C-14 kan het computer-model van figuur 1, 2 of 3 worden gebruikt. Sla het model op onder de naam *verval\_3*.
  - b Het computermodel laat zien dat het aantal kernen C-14 in de atmosfeer van de aarde vanaf 0 toeneemt, maar dat die toename geleidelijk aan afvlakt tot uiteindelijk het aantal kernen C-14 constant wordt. Verklaar dit model-resultaat.
  - c Onderzoek met het computermodel welk effect een toename van de intensiteit van de kosmische straling heeft op het verloop van het aantal kernen C-14 in de atmosfeer van de aarde in de loop van de tijd.
- 6 Het gevormde C-14 komt via fotosynthese in de voedselketen terecht, en daardoor ook in voorwerpen die eeuwen geleden van organisch materiaal zijn gemaakt. Leg uit hoe daarmee de ouderdom van die voorwerpen te bepalen is.

### Moeder-dochterverval

Het vervalproduct van sommige radioactieve isotopen is zelf ook weer radio-actief. In dit geval is er sprake van een *moeder-dochterverval*. De eigenschappen van een dergelijk verval zijn te onderzoeken met een computermodel. Het computermodel van figuur 1, 2 en 3 geeft dan het verval van de moederisotoop, met  $N$  het aantal instabiele kernen en  $\lambda$  de vervalconstante van de moederisotoop. Het aantal per tijdstap vervallende kernen  $dN$  van de moederisotoop is dan gelijk



Figuur 4 – Het aantal instabiele kernen  $N_m$  van de moederisotoop (zwart) en  $N_d$  van de dochterisotoop (rood) in de loop van de tijd  $t$  bij moeder-dochter-verval.

aan het aantal per tijdstap gevormde instabiele kernen  $dN$  van de dochterisotoop. En die instabiele kernen van de dochterisotoop vervallen dan weer met een eigen (andere) waarde van de vervalconstante  $\lambda$ .

- 7** Leg uit dat bij moeder-dochterverval het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop vanaf 0 op het tijdstip  $t = 0$  s eerst toeneemt en na het bereiken van een maximum weer afneemt, zoals weergegeven in het  $N,t$ -diagram van figuur 4.
- 8** Het computermodel van figuur 1, 2 en 3 berekent het aantal instabiele kernen  $N_m$  van de moederisotoop met een vervalconstante  $\lambda_m$ . Vul dit computermodel aan met het verval van de instabiele dochterisotoop. Bedenk daarbij het volgende:
- Voor de startwaarde van het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop geldt:  $N_d = 0$ .
  - In elke tijdstap neemt het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop toe door het verval van de moederisotoop.
  - In elke tijdstap neemt het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop af door radioactief verval met een vervalconstante  $\lambda_d$ .
- Zorg er ten slotte bij het aanvullen van het computermodel voor dat het aantal instabiele kernen  $N_m$  en  $N_d$  van de moeder- en dochterisotoop in hetzelfde  $N,t$ -diagram worden weergegeven. Maak ook de activiteit  $A_m$  en  $A_d$  van de moeder- en dochterisotoop in hetzelfde  $A,t$ -diagram zichtbaar. Sla het model op onder de naam *verval\_4*.
- a** Voer de (zelf te kiezen) startwaarden voor in het computermodel in. Maak daarbij  $\lambda_d$  even groot als  $\lambda_m$ . Laat het model lopen, en controleer in het  $N,t$ -diagram of het model het radioactief verval juist weergeeft. Ga daarbij na of het aantal instabiele kernen  $N_m$  van de moederisotoop afneemt zoals bij normaal radioactief verval, en of het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop vanaf 0 op het tijdstip  $t = 0$  s eerst toeneemt en na het bereiken van een maximum weer afneemt (zie opdracht 7).
- b** Onderzoek met het model de eigenschappen van het moeder-dochterverval door bij een vaste waarde van  $\lambda_m$  de waarde van  $\lambda_d$  te veranderen. Kies daarbij  $\lambda_d = 0,1 \cdot \lambda_m$  en  $\lambda_d = 100 \cdot \lambda_m$  als uiterste waarden, en enkele waarden daar tussenin. Trek een conclusie over het verloop van het aantal instabiele kernen  $N_d$  van de dochterisotoop als de vervalconstante  $\lambda_d$  van de dochterisotoop toeneemt van (veel) kleiner naar (veel) groter dan de vervalconstante  $\lambda_m$  van de moederisotoop.
- c** Geef zo mogelijk een verklaring voor de bij vraag b getrokken conclusie.
- 9** Leg uit welke van de twee extreme situaties uit vraag b van opdracht 8 wordt toegepast bij de productie van radioactieve isotopen met een ‘radioactieve koe’.



### 3 Tijdrit Tour de France 1989

De Tour de France van 1989 werd in de laatste etappe beslist. Laurent Fignon verloor in die tijdrit 58 s op zijn rivaal Greg LeMond, die daardoor met 8 s voorsprong de Tour won. LeMond gebruikte alle technische snufjes uit die tijd, Fignon vond dat kennelijk niet nodig (zie figuur 1). Had Fignon die Tour kunnen winnen?



Figuur 1 – Fignon (boven) en LeMond (onder) tijdens de afsluitende tijdrit.



Figuur 2 – Bij wielrennen is de lucht-wrijving de belangrijkste factor, de rolwrijving is een stuk kleiner.

De tijdrit is te verdelen in twee stukken: eerst op gang komen na het startschot, en daarna rijden met een constante snelheid. Bij deze beweging hebben we te maken met twee krachten: een voorwaartse kracht en een luchtwrijvingskracht. Andere wrijvingskrachten, zoals de rolwrijvingskracht en de wrijving in de draaiende onderdelen van de fiets verwaarlozen we.

De kracht die de wielrenner op de pedalen uitoefent wordt via de ketting en de wielen omgezet in een afzetkracht op de weg. Daardoor zorgt de weg voor een voorwaartse kracht  $F_{vw}$  op de fiets. We nemen aan dat deze kracht constant is. De tegenwerkende luchtwrijvingskracht  $F_{w,l}$  hangt af van de snelheid: hoe groter de snelheid is, des te groter is de luchtwrijvingskracht.

- 1 In het eerste deel van de tijdrit moet de wielrenner vanuit stilstand op snelheid komen.
  - a Voorspel met een grafiek hoe de snelheid van de wielrenner verandert. Het gaat alleen om de vorm van de grafiek.
  - b Leg uit waarom je deze grafiek verwacht. Gebruik in je uitleg de invloed van de twee krachten.
- In het tweede deel van de tijdrit is de snelheid (bij benadering) constant.
  - c Wat kun je zeggen over de twee krachten op de wielrenner tijdens dit deel van de tijdrit?

In de tijdrit neemt de snelheid eerst geleidelijk toe en wordt dan constant onder invloed van de constante voorwaartse kracht en de snelheidsafhankelijke luchtwrijvingskracht.

De luchtwrijvingskracht  $F_{w,l}$  hangt niet alleen af van de snelheid, maar ook van de grootte en vorm van de wielrenner en van de dichtheid van de lucht.

#### Luchtwrijvingskracht

Bij het fietsen stroomt de lucht langs je lichaam en de fiets. Je botst als het ware voortdurend tegen de lucht aan. Op je lichaam en de fiets wordt dan een luchtwrijvingskracht uitgeoefend: een kracht die de beweging tegenwerkt. De grootte van de luchtwrijvingskracht hangt af van de snelheid, de stroomlijn en het frontaal oppervlak van de wielrenner en van de dichtheid van de lucht:

$$F_{w,l} = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

In deze formule is  $F_{w,l}$  de luchtwrijvingskracht (in N),  $c_w$  de luchtwrijvingscoëfficiënt (zonder eenheid),  $A$  het frontaal oppervlak (in  $m^2$ ),  $\rho$  de dichtheid van de lucht (in  $kg/m^3$ ) en  $v$  de snelheid (in  $m/s$ ).

In de formule geeft de luchtwrijvingscoëfficiënt  $c_w$  de invloed van de stroomlijn: hoe beter de stroomlijn is, des te kleiner is de  $c_w$ -waarde. De luchtwrijvingskracht is *kwadratisch evenredig* met de snelheid  $v$ . Bij grotere snelheden neemt de luchtwrijving dus sterk toe.

- 2 De formule voor de luchtwrijvingskracht wordt vaak vereenvoudigd tot  $F_{w,l} = k \cdot v^2$ . In deze formule is  $k$  een constante.
  - a Leg uit waarom we de formule voor de luchtwrijvingskracht zo kunnen schrijven.  
Voor de tijdrit van Fignon geldt:  $c_w = 0,82$ ,  $A = 0,37 m^2$  en  $\rho = 1,28 kg/m^3$ .
  - b Hoe groot is de constante  $k$  bij Fignon? Rond af op drie decimalen.
  - c Bereken de grootte van de luchtwrijvingskracht op Fignon bij een snelheid van 36 km/h (dat is 10 m/s).

- 3 De luchtwrijvingskracht is – zelfs bij een snelheid van 36 km/h – niet erg groot. De wielrenner oefent op de pedalen een kracht uit die tijdens een tijdrit wel zo'n 300 N kan bedragen. Die kracht wordt via tandwielen, ketting en wiel omgezet in een veel kleinere voorwaartse kracht. Voor deze (constant veronderstelde) voorwaartse kracht tijdens de tijdrit van Fignon geldt:  $F_{vw} = 42,5$  N.
- a Hoe groot is de resulterende kracht  $F_{res}$  bij een snelheid van 36 km/h? Is er dan al sprake van krachterevenwicht? Wat kun je zeggen over de snelheid en over de versnelling?  
In het tweede deel van de tijdrit is de snelheid constant. Dan is er wél sprake van krachterevenwicht.
- b Hoe groot is de resulterende kracht in het tweede deel van de tijdrit?
- c Hoe kun je de (constante) snelheid in het tweede deel van de tijdrit berekenen met behulp van de twee krachten die op de wielrenner werken? En hoe groot is die snelheid dan?
- d Schets in een diagram het verloop van  $F_{vw}$ ,  $F_{w,l}$ ,  $F_{res}$ ,  $a$  en  $v$  in de loop van de tijd  $t$ . Leg uit hoe de verandering van deze grootheden met elkaar samenhangt.

Het is nu duidelijk hoe de tijdrit in grote lijnen verloopt. Bij de start is de resulterende kracht gelijk aan de voorwaartse kracht (de luchtwrijvingskracht is dan nog nul, omdat de beginsnelheid nul is). Dat veroorzaakt een versnelling, en dus een toename van de snelheid. Door die toename van de snelheid neemt de luchtwrijvingskracht toe, en daardoor nemen de resulterende kracht en de versnelling af. En een afnemende versnelling betekent: de groei van de snelheid vlakkt af. Als uiteindelijk de resulterende kracht nul is geworden, is ook de versnelling nul en blijft de snelheid verder constant. Er is dan sprake van *krachterevenwicht*: de luchtwrijvingskracht is even groot geworden als de (constante) voorwaartse kracht.

Met een computermodel kun je de beweging nauwkeurig doorrekenen. En dat computermodel gebruik je om na te gaan of Fignon de Tour had kunnen winnen als hij ook een helm en een speciaal tijdritstuur had gebruikt.

#### Basismodel

Gebruik bij het ontwerpen en bouwen van de computermodellen het 'basismodel voor kracht en beweging'. Maak daarbij een keuze voor een tekstmodel met rekenregels en startwaarden of voor een grafisch model.

#### Startwaarden

$dt = 10$  [s]  
 $F_{vw} = 42,5$  [N]  
 $k = 0,194$  [ $\text{Ns}^2/\text{m}^2$ ]  
 $m = 85$  [kg]  
 $v = 0$  [m/s]  
 $s = 0$  [m]

Figuur 3 – De startwaarden voor de tijdrit van Fignon.



Figuur 4 – Fignon won wél de Tour de France van 1983 en 1984.

- 4 Voor het computermodel van de tijdrit van Fignon gelden de startwaarden van figuur 3.
- a Ontwerp, bouw en test een computermodel van de tijdrit van Fignon. Controleer of het computermodel goed werkt voor deze tijdrit. Doe dat door na te gaan of het verloop van de snelheid (ruwweg) klopt met je verwachting uit opdracht 3, en of het computermodel de juiste eindtijd van Fignon levert: 27 minuten en 55 s over een afstand van 24,5 km. Sla het model op onder de naam *tijdrit\_1*.
- b Als het computermodel het verloop van de snelheid goed weergeeft maar een verkeerde eindtijd levert, is een aanpassing nodig.
  - Probeer eerst een kleinere tijdstap (bijvoorbeeld 5 of zelfs 1 s). Het nadeel hiervan is dat de rekentijd van de computer toeneemt. Dat is dus niet handig als het modelresultaat daardoor niet veel verbetert.
  - Probeer een andere (iets grotere of kleinere) waarde van de voorwaartse kracht en/of de constante  $k$  in de formule voor de luchtwrijvingskracht, tot het computermodel de juiste eindtijd oplevert.
- 5 LeMond had bij het begin van de tijdrit een achterstand van 50 s op Fignon. Maar LeMond had voor de tijdrit 58 s minder nodig dan Fignon, en won daarmee uiteindelijk de Tour de France van 1989 met een voorsprong van 8 s op Fignon. Als Fignon een helm en een speciaal tijdritstuur had gebruikt, zou de constante  $k$  in de formule voor de luchtwrijvingskracht 2% lager zijn geweest. Dus: 0,190 in plaats van 0,194.
- a Pas het computermodel voor de tijdrit van Fignon hierop aan. Bepaal met het computermodel de eindtijd van de tijdrit van Fignon als hij een helm en speciaal tijdritstuur had gebruikt.
- b Wat is je conclusie: had Fignon de Ronde van Frankrijk in 1989 op deze

manier kunnen winnen?

- 6** In het computermodel van opdracht 4 en 5 is geen rekening gehouden met de rolwrijvingskracht. Deze rolwrijvingskracht is constant, en dus niet afhankelijk van de snelheid. Voor deze rolwrijvingskracht geldt  $F_{w,r} = 4,0$  N. Dat is een redelijke gemiddelde waarde bij het wielrennen.
  - a** Vul het computermodel van opdracht 4 aan met deze constante rolwrijvingskracht, en zorg ervoor dat het model de juiste eindtijd voor Fignon levert. Sla het model op onder de naam *tijdrit\_2*.
  - b** Onderzoek met het model op dezelfde manier als in opdracht 5 of Fignon de Ronde van Frankrijk in 1989 had kunnen winnen als hij een helm en een speciaal tijdritstuur had gebruikt.





## 4 Vrije val door de geluidsbarrière

Lees eerst het volgende krantenartikel.

### Fransman wil vrije val door de geluidsbarrière

Een Fransman wil binnenkort als eerste mens in vrije val de geluidsbarrière doorbreken. Hij laat zich door een weerballon op 40 kilometer hoogte boven de aarde brengen, om dan met zijn hoofd vooruit naar beneden te storten. Volgens wetenschappers bereikt de man na 37 seconden een snelheid van 1224 kilometer per uur, wat op die hoogte de snelheid van het geluid is. De Fransman wordt daarna nog

sneller. Op 7000 meter hoogte wil hij zijn parachute openen. In totaal duurt de val 8,5 minuut, het opstijgen twee uur.

De 54-jarige Michel Fournier trekt voor zijn recordpoging een speciaal pak aan, dat ruim honderdduizend gulden kostte. De recordpoging heeft kans van slagen omdat de lucht hoog boven de aarde uiterst dun is, waardoor de weerstand geen probleem vormt.

Bron: *De Gelderlander*, 26 juli 2000.

Volgens het artikel vormt ‘de weerstand geen probleem’. Maar betekent dat dan ook dat de luchtwrijvingskracht nul is?

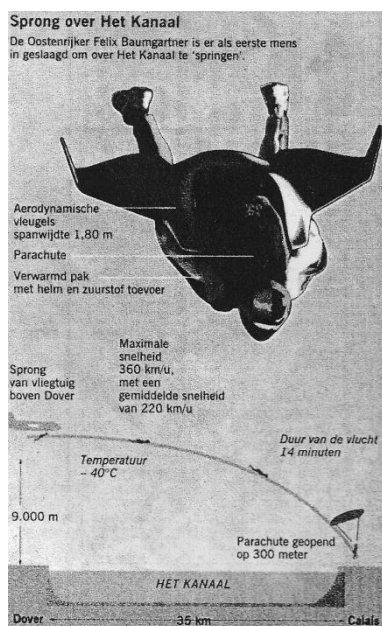
### Basismodel

Gebruik bij het ontwerpen en bouwen van de computermodellen het ‘basismodel voor kracht en beweging’. Maak daarbij een keuze voor een tekstmodel met rekenregels en startwaarden of voor een grafisch model.

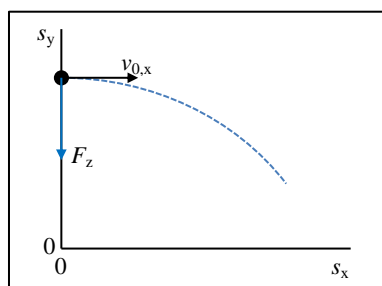
- 1 Ontwerp, bouw en test een computermodel van de valbeweging zonder luchtweerstand. Sla het model op onder de naam *val\_1*. Een realistische waarde voor de massa van Fournier met parachute is:  $m = 95 \text{ kg}$ . Controleer met het model de gegevens over de val in het artikel: een doorbreken van de geluidsbarrière na 37 s. Wat is je conclusie over het wel of niet verwaarloosbaar klein zijn van de luchtwrijvingskracht in dit deel van de valbeweging?
- 2 Ontwerp, bouw en test ook een computermodel van deze valbeweging met luchtweerstand. Sla het model op onder de naam *val\_2*. Realistische waarden voor de luchtwrijvingscoëfficiënt, de massa en het frontaal oppervlak zijn:  $c_w = 0,70$ ,  $m = 95 \text{ kg}$  en  $A = 0,60 \text{ m}^2$ . In het model moet je rekening houden met het feit dat de dichtheid van de lucht afhangt van de hoogte boven het aardoppervlak. Voor de luchtdichtheid  $\rho$  geldt dat deze halveert met elke 5,5 km stijging. Dus, in een formule:  $\rho = 1,29 \cdot (1/2)^{h/5500}$ . In deze formule is  $h$  de hoogte (in m) boven het aardoppervlak en 1,29 de dichtheid (in  $\text{kg/m}^3$ ) van de lucht bij het aardoppervlak.
  - a Controleer met dit computermodel opnieuw de gegevens over de val in het artikel: een doorbreken van de geluidsbarrière na 37 s.
  - b Verklaar het verloop van de snelheid  $v$  in de loop van de tijd  $t$  bij deze beweging.
  - c Bepaal met het model hoe groot tijdens de val de maximale snelheid is, en op welk tijdstip en op welke hoogte boven het aardoppervlak die maximale snelheid wordt bereikt.



## 5 Het Kanaal over vliegen



Figuur 1 – Baumgartner tijdens zijn Kanaalvlucht.



Figuur 2 – De horizontale worp is een combinatie van een beweging in de verticale y-richting en de horizontale x-richting.

### Basismodel

Gebruik bij het ontwerpen en bouwen van de computermodellen het ‘basismodel voor kracht en beweging’. Maak daarbij een keuze voor een tekstmodel met rekenregels en startwaarden of voor een grafisch model.

Lees eerst het volgende krantenartikel.

### Icarus II vliegt over Het Kanaal

Het Kanaal is voor het eerst per parachute overbrugd. Felix Baumgartner, een 34-jarige Oostenrijker, sprong vanochtend even na vijf uur op negen kilometer hoogte boven Dover uit een vliegtuig en landde veertien minuten later veilig op Cap Blanc-Nez bij Calais, hemelsbreed ongeveer 35 kilometer verder.

Voor het eerste deel van het kogelbaanvormige traject gebruikte hij een kunststof vleugeltje om zijn vrije val te sturen. Hij bereikte daarbij snelheden van 360 kilometer per uur. Op ruim driehonderd meter hoogte wierp hij volgens plan de vleugel af en opende hij zijn parachute. Hij landde op exact de geplande plek voor de tv-camera's die zijn vlucht hadden gevolgd vanaf het moment dat hij als

een zwart stipje uit de wolken verscheen.

Baumgartner had zijn Kanaalsprong ‘Icarus II’ genoemd, naar de onfortuinlijke Griek die volgens de mythe in zee viel nadat de was waarmee zijn vleugels waren bevestigd door de zonnehitte smolt.

Baumgartner sprong eerder van het Christusbeeld in Rio de Janeiro en van de Petronas Towers in Kuala Lumpur, het hoogste gebouw ter wereld. Voor zijn Kanaalvlucht trainde hij drie jaar, onder meer door vastgebonden op een Porsche over een racecircuit te stuiven. Na de landing in Frankrijk noemde hij zijn vlucht slechts “mijn grootste project tot nu toe”, en hij zei dat er nieuwe uitdagingen wachtten. “Het is nog topgeheim, maar het wordt geweldig.”

Bron: NRC Handelsblad, 31 juli 2003.

Het artikel en de bijbehorende illustratie geven allerlei informatie over de vlucht: de spronghoogte, de afstand, de vluchttijd, de gemiddelde snelheid en de maximale snelheid. Maar het belangrijkste bij het voorbereiden van deze Kanaalvlucht is het bepalen van de snelheid die het vliegtuig boven Dover moet hebben om de vlucht van Baumgartner te laten slagen. Daarbij moet rekening worden gehouden met de snelheidsafhankelijke luchtweerstand tijdens de vlucht. We nemen aan dat het vleugeltje alleen is bedoeld om tijdens de vlucht bij te sturen, en geen omhoog gerichte liftkracht levert.

**1** De Kanaalvlucht van Baumgartner is op te vatten als een horizontale worp vanaf een bepaalde hoogte boven de grond, in eerste instantie zonder luchtweerstand. Zo'n horizontale worp is een combinatie van twee bewegingen (zie figuur 2):

- Een verticale versnelde beweging (in de y-richting) onder invloed van de zwaartekracht met een beginsnelheid  $v_{0,y} = 0$ . Een realistische waarde voor de massa van Baumgartner met vleugel en parachute is:  $m = 95$  kg.
- Een horizontale eenparige beweging (in de x-richting) met een (constante) snelheid  $v_{0,x}$ .

Bij een horizontale worp zonder luchtweerstand is dan eenvoudig uit te rekenen hoe groot de snelheid het vliegtuig moet zijn.

- Bereken voor de verticale beweging de valtijd van Baumgartner vanaf een hoogte van 9,0 km.
- De berekende valtijd is ook de tijdsduur van de beweging in de horizontale richting, waarin Baumgartner een afstand van 35 km aflegt. Bereken hoe groot in dat geval zijn snelheid in de horizontale richting, en dus ook de snelheid van het vliegtuig geweest moet zijn.

**2** Ontwerp, bouw en test een computermodel van een horizontale worp met een beginsnelheid  $v_{0,x}$  vanaf een hoogte  $h_0$  zonder luchtweerstand. Sla het model op onder de naam *kanaalvlucht\_1*.

Laat het computermodel de plaats van Baumgartner in de x- en y-richting in een diagram tegen elkaar uitzetten, zodat een beeld ontstaat van zijn baan.

Controleer met dit model je antwoorden bij opdracht 1.

- 3** Ontwerp, bouw en test een computermodel van een horizontale worp met luchtweerstand. Dus: voeg in het model van opdracht 2 aan beide bewegingen een snelheidsafhankelijke luchtweerstandskracht toe. Sla het model op onder de naam *kanaalvlucht\_2*. Realistische waarden voor de luchtweerstandscoefficiënt, de massa en het frontaal oppervlak van Baumgartner zijn:  $c_w = 0,45$ ,  $m = 95$  kg en  $A = 0,20$  m<sup>2</sup>.  
In het model moet je rekening houden met het feit dat de dichtheid van de lucht afhangt van de hoogte boven het aardoppervlak. Voor de luchtdichtheid  $\rho$  geldt dat deze halveert met elke 5,5 km stijging. Dus, in een formule:  
$$\rho = 1,29 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{h/5500}$$
  
In deze formule is  $h$  de hoogte (in m) boven het aardoppervlak en 1,29 de dichtheid (in kg/m<sup>3</sup>) van de lucht bij het aardoppervlak.
- a** Onderzoek met het model welk effect het toevoegen van de luchtweerstandskracht heeft, zowel op de tijdsduur van de vlucht als op de verplaatsing in de horizontale richting.
  - b** Bepaal met het model welke snelheid het vliegtuig boven Dover moet hebben om de Kanaalvlucht van Baumgartner te laten slagen.

## 6 Ingooien

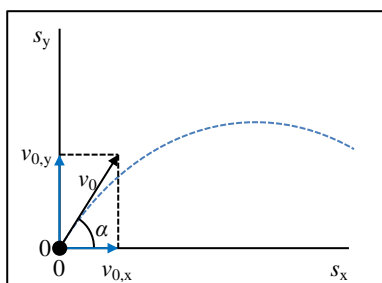
Lees eerst het volgende krantenartikel.



Figuur 1 – De ingooi.

### Basismodel

Gebruik bij het ontwerpen en bouwen van de computermodellen het ‘basismodel voor kracht en beweging’. Maak daarbij een keuze voor een tekstmodel met rekenregels en startwaarden of voor een grafisch model.



Figuur 2 – De schuine worp is een combinatie van een beweging in de verticale y-richting en de horizontale x-richting.

### Ingooi 30 graden komt het verst

Een ingooi bij voetbal komt het verst wanneer de speler de bal onder een hoek van dertig graden werpt. Dit blijkt uit Brits onderzoek dat binnenkort gepubliceerd wordt in het tijdschrift *Sports Biomechanics*. Het inzicht gaat in tegen de meeste leerboeken, die 45 graden de beste hoek noemen om ver te gooien. De onderzoekers, verbonden aan de universiteit van Brunel (West-Londen) lieten voetballers ingooien nemen onder

hoeken variërend van tien tot zestig graden. Uit video-opnamen van die acties bepaalden ze de snelheid en de hoek waaronder de bal was ingegooid. Deze gegevens duiden op een optimale werphoek van dertig graden – uitgaande van windstil weer. Wanneer de speler de bal een kleine tegenspin meegeeft, komt deze bij iets minder dan dertig graden nog verder.

Bron: *NRC Handelsblad*, 26 januari 2006.

Het artikel beweert dat ‘de meeste leerboeken’ er naast zitten met een hoek van  $45^\circ$  als optimale werphoek. Maar dat klopt niet, omdat het in het geval van die leerboeken gaat om een ‘worp vanaf de grond zonder luchtweerstand’. In het in het artikel beschreven onderzoek gaat het om een ‘worp vanaf een bepaalde hoogte boven de grond met luchtweerstand’.

- Ontwerp, bouw en test een computermodel van een schuine worp vanaf de grond zonder luchtweerstand. Sla het model op onder de naam *ingooi\_1*. Zo’n schuine worp is een combinatie van twee bewegingen (zie figuur 2):

  - Een verticale vertraagde en na het bereiken van het hoogste punt versnelde beweging (in de y-richting) onder invloed van de zwaartekracht met een beginsnelheid  $v_{0,y}$ . Een realistische waarde voor de massa van de bal is:  $m = 0,44$  kg.
  - Een horizontale eenparige beweging (in de x-richting) met een (constante) snelheid  $v_{0,x}$ .

De snelheidscomponenten  $v_{0,x}$  en  $v_{0,y}$  hangen af van de beginsnelheid  $v_0$  en de werphoek  $\alpha$ .

Laat het computermodel de plaats van de bal in de x- en y-richting in een diagram tegen elkaar uitzetten, zodat een beeld ontstaat van de baan van de bal.

Controleer met het model dat in deze situatie de optimale werphoek  $45^\circ$  is.
- Ontwerp, bouw en test een computermodel van een schuine worp vanaf de grond met luchtweerstand. Dus: voeg in het model van opdracht 1 aan beide bewegingen een snelheidsafhankelijke luchtwrijvingskracht toe. Sla het model op onder de naam *ingooi\_2*. Realistische waarden voor de lucht-wrijvingscoëfficiënt, de massa en het frontaal oppervlak van de bal zijn:  $c_w = 0,49$ ,  $m = 0,44$  kg en  $A = 0,038$  m<sup>2</sup>.

Onderzoek met het model welk effect het toevoegen van de lucht-wrijvingskracht heeft, zowel op de optimale werphoek als op de werpafstand.
- Ontwerp, bouw en test een computermodel van een schuine worp vanaf een bepaalde hoogte boven de grond met luchtweerstand. Dus: voeg in het model van opdracht 2 aan de beweging in verticale richting een beginhoogte toe. Sla het model op onder de naam *ingooi\_3*. Een realistische waarde voor de beginhoogte is:  $h_0 = 2,2$  m.

Onderzoek met het model welk effect het toevoegen van de beginhoogte heeft, zowel op de optimale werphoek als op de werpafstand. In hoeverre

komt dit overeen met de resultaten van het in het artikel beschreven onderzoek?

## 7 Planeetbanen

In deze opdracht bouw en test je een computermodel van planeetbanen. Je onderzoekt daarmee of de beweging van planeten rond een ster in overeenstemming is met de theorie.

Voor het bouwen en testen van het computermodel gaan we uit van een vereenvoudigde situatie: een planeet met massa  $m = 10$  op een afstand  $r = 8$  van een ster met massa  $M = 100$ . De eenheden van deze grootheden laten we buiten beschouwing, evenals de waarde van de gravitatieconstante die we in het model op  $G = 1$  stellen.

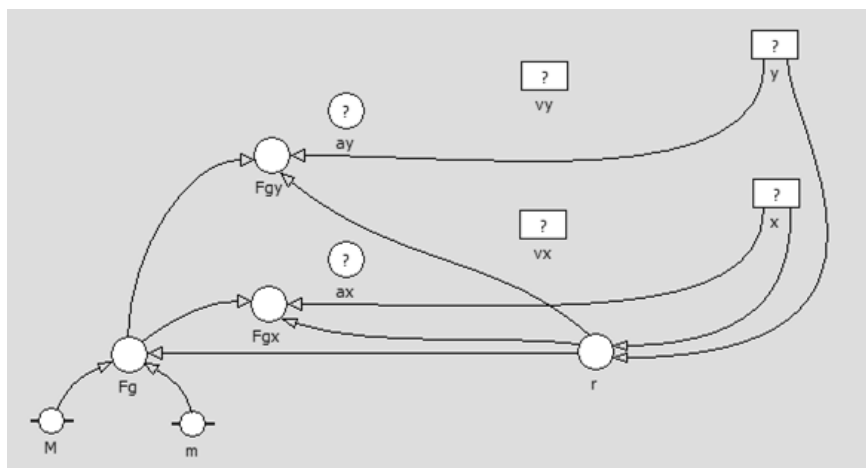
In figuur 1 en 2 zie je een deel van het computermodel in de vorm van een tekstmodel en een grafisch model in Coach6. Figuur 3 geeft hetzelfde deel van het computermodel in Modellus.

rekenregels	
1	$G = 1$
2	$M = 100$
3	$m = 10$
4	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
5	$F_g = G \cdot M \cdot m / r^2$
6	$F_{gx} = -F_g \cdot x / r$
7	$F_{gy} = -F_g \cdot y / r$
8	$a_x = \dots$
9	$a_y = \dots$
10	$dv_x/dt = \dots$
11	$dv_y/dt = \dots$
12	$dx/dt = \dots$
13	$dy/dt = \dots$

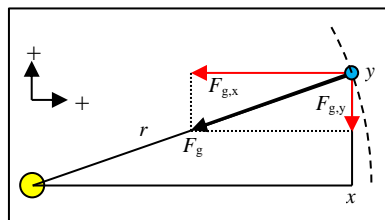
Figuur 3 – Computermodel in Modellus.

rekenregels	startwaarden	
1	$t = t + dt$	$t = 0$
2	$r = \text{Sqrt}(\text{Sqr}(x) + \text{Sqr}(y))$	$dt = 0,0001$
3	$F_g = G \cdot M \cdot m / \text{Sqr}(r)$	$G = 1$
4	$F_{gx} = -F_g \cdot x / r$	$M = 100$
5	$F_{gy} = -F_g \cdot y / r$	$m = 10$
6	$a_x = \dots$	$v_x = \dots$
7	$a_y = \dots$	$v_y = \dots$
8	$v_x = \dots$	$x = \dots$
9	$v_y = \dots$	$y = \dots$
10	$x = \dots$	
11	$y = \dots$	

Figuur 1 – Tekstmodel in Coach6. Als het model compleet is gemaakt (zie opdracht 1 en 2), stel dan bij 'instellingen' een looptijd van 100.000 iteraties in.



Figuur 2 – Grafisch model in Coach6. De grootheden  $r$ ,  $F_g$ ,  $F_{g,x}$  en  $F_{g,y}$  in dit model zijn op dezelfde manier gedefinieerd als in de rekenregels 2 t/m 5 van het tekstmodel in Coach6 (zie figuur 1). Als het model compleet is gemaakt (zie opdracht 1 en 2), stel dan bij 'instellingen' een tijdstap  $dt = 0,0001$  s en een looptijd  $t = 20$  s in.



Figuur 4 – De beweging van een planeet (blauw) rond een ster (geel) is een combinatie van een beweging in de x-richting en een beweging in de y-richting.

In dit computermodel ontstaat de beweging van de planeet rond de ster uit een combinatie van twee bewegingen (zie figuur 4):

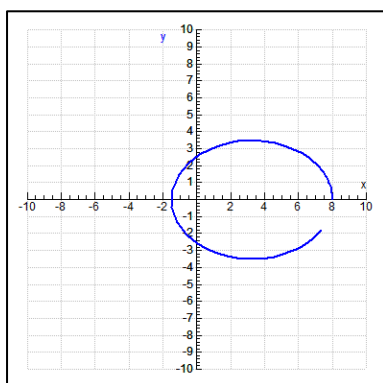
- Een beweging met een snelheid  $v_x$  in de x-richting onder invloed van de kracht  $F_{g,x}$ .
- Een beweging met een snelheid  $v_y$  in de y-richting onder invloed van de kracht  $F_{g,y}$ .

Hierbij zijn  $F_{g,x}$  en  $F_{g,y}$  de componenten (in de x- en y-richting) van de gravitatiekracht  $F_g$  van de ster op de planeet op een onderlinge afstand  $r$ . De positie van de planeet wordt gegeven door de coördinaten  $x$  en  $y$  ten opzichte van de positie van de ster.

- 1 Van het computermodel zijn in figuur 1 de eerste vijf rekenregels van het tekstmodel in Coach gegeven.
  - a Leg uit welke grootheden er in de rekenregels 2 en 3 van het computermodel in figuur 1 worden berekend, en hoe.  
In de rekenregels 4 en 5 worden de x- en y-componenten van de gravitatiekracht  $F_g$  berekend. Dit wordt *niet* gedaan met de regels  $F_{g,x} = F_g \cdot \cos \alpha$  en  $F_{g,y} = F_g \cdot \sin \alpha$  omdat het computermodel dan een grote kans loopt om in het rekenwerk vast te lopen. In plaats daarvan zijn de beide krachtcomponenten gedefinieerd door te werken met verhoudingen van de zijden in gelijkvormige driehoeken. Bovendien wordt daarbij rekening gehouden met het teken van deze krachtcomponenten ten opzichte van de in figuur 4 gedefinieerde positieve x- en y-richting.
  - b Toon aan dat de rekenregels 4 en 5 van het computermodel in figuur 1 juist zijn.
- 2 De computermodellen van figuur 1, 2 en 3 zijn nog niet compleet: er ontbreken rekenregels of instroom- en verbindingspijlen, en er ontbreken startwaarden.
  - a Vul één van de computermodellen aan met de ontbrekende rekenregels of instroom- en verbindingspijlen.
  - b Vul het computermodel aan met de ontbrekende startwaarden. Laat de planeet daarbij starten vanuit de juiste positie (dus:  $r = 8$ ) op de x-as, en bedenk wat de startwaarden van  $x$ ,  $y$  en  $v_x$  dan zijn. Neem voorlopig  $v_y = 2$  voor de startwaarde van de snelheid in de y-richting.
  - c Maak het computermodel af door het toevoegen van een x,y-diagram voor het weergeven van de baan van de planeet. Kies daarbij voor een as-instelling van  $-10$  tot  $+10$  en gelijke as-verhoudingen. Sla het model op onder de naam *planeetbaan*.
  - d Laat het model lopen, en ga na dat de planeetbaan een ellipsbaan rond de ster is zoals in figuur 5.
- 3 Het computermodel levert met de startwaarde  $v_y = 2$  geen cirkel- maar een ellipsbaan.
  - a Verander de startwaarde van  $v_y$  tot de baan van de planeet een cirkelbaan rond de ster is.
  - b Leg uit dat deze startwaarde van  $v_y$  de baansnelheid  $v$  van de planeet is.
  - c Noteer deze baansnelheid  $v$  en de bijbehorende waarde van de baanstraal  $r$  op de eerste rij in de tabel van figuur 6.

#### Diagram plaatsen

Na het plaatsen van een leeg diagram in Coach6 moet je de assen van het diagram koppelen aan de variabelen  $x$  en  $y$  in het computermodel. Voor de x-as van het diagram doe je dat als volgt: rechtsklik op het diagram en kies diagraminstelling > kies kolom: C1 > verbinding: toevoegen > kies variabele: x. Doe daarna hetzelfde bij kolom C2 voor de variabele y.



Figuur 5 – De planeetbaan is volgens het computermodel bij een startwaarde  $v_y = 2$  een ellipsbaan.

$r$	$v$	$M$	$v^2 \cdot r$	$G \cdot M$

Figuur 6 – Modelresultaten.

Met het computermodel is te onderzoeken of de theorie over de cirkelbeweging van planeten rond een ster juist is.

- 4 Volgens de theorie van de cirkelbeweging van planeten rond een ster geldt:
 
$$v^2 \cdot r = G \cdot M$$



- a** Controleer of de bij vraag 3c gevonden waarden van  $v$  en  $r$  aan deze vergelijking voldoen. Bedenk daarbij dat in het computermodel is gekozen voor  $G = 1$ .
- b** Voorspel met de vergelijking de waarde van  $v$  in het computermodel bij minstens twee andere waarden van  $r$ , en noteer deze in de tabel van figuur 6. Controleer met het computermodel of deze voorspellingen juist zijn.
- c** Volgens de vergelijking hangt de baan van de planeet niet af van zijn massa  $m$ . Controleer dit met het computermodel.
- d** Volgens de vergelijking hangt de baan van de planeet wel af van de massa  $M$  van de ster waar de planeet omheen draait. Controleer dit met het computermodel.



## 8 Zonnezeil

Lees eerst het volgende krantenartikel.

### Ruimteschip met zonnezeil stijgt zeer ver het heelal in

Voor het eerst in de geschiedenis zal een ruimteschip een zonnezeil inzetten om vaart te winnen. Vanavond om kwart voor tien vertrekt, als alles goed gaat, de Cosmos-1 voor zijn opmerkelijke missie.

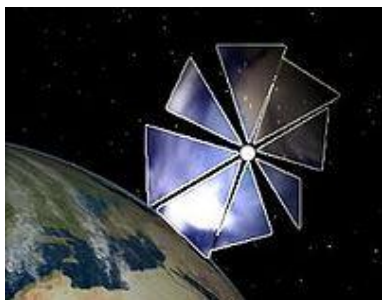
De 99 kilo zware sonde Cosmos-1 heeft geen motor, de voortstuwing geschiedt geheel door zonnewind. Zonnewind (niet te verwarren met de stroom geladen deeltjes die de zon uitzendt en die bijvoorbeeld het Noorderlicht veroorzaken) bestaat uit lichtdeeltjes van de zon die, wanneer ze op een zeil botsen, druk uitoefenen.

Het zonnezeil van de Cosmos-1 bestaat uit acht driehoekige segmenten (0,005 mm dun kunststof zoals ook bij heliumballonnen wordt gebruikt, met een aluminium coating voor de reflectie) die samen een 'bloem' opspannen met een middellijn van 30 meter. Het uitvouwen van de 'bladeren' geschiedt na vier dagen door

in de tubevormige randen van de stukken zeil lucht te blazen. Al naar gelang de stand van de zon zijn de acht zeilsegmenten te richten, vergelijkbaar met de rotorbladen van een helikopter.

De kracht die de zonnewind op het zeil uitoefent is zeer klein, maar werkt wel continu. Aldus stijgt de snelheid van de sonde per dag met zo'n 160 kilometer per uur. De testvlucht zal enkele weken in beslag nemen en eindigt wanneer het fragiele zeildoek het begeeft.

In principe is zeilen op de zonnewind een efficiënte en goedkope manier om naar de rand van het zonnestelsel te reizen. In drie jaar tijd zou de snelheid tot zo'n 160.000 kilometer per uur kunnen oplopen. Probleem is dat de kracht van de zon op grote afstand weinig meer voorstelt. Om die reden is geopperd de voortstuwing per laserstraal vanaf de aarde te organiseren.



Figuur 1 – De sonde Cosmos-1 met zonnezeil (artist's impression).

Bron: *NRC Handelsblad*, 21 juni 2005.

De in het artikel genoemde 'lichtdeeltjes' zijn de door de zon uitgezonden fotonen. Die fotonen oefenen een kracht uit bij reflectie op het zonnezeil. De vraag is hoe groot die kracht is, en of de daardoor veroorzaakte snelheidstoename klopt met de in het artikel genoemde waarden.

- 1 De kracht  $F_f$  die één foton uitoefent bij reflectie op het zonnezeil wordt gegeven door de volgende formule:  $F_f = 2 \cdot E_f/c$ . Hierin is  $E_f$  de fotonenergie en  $c$  de lichtsnelheid.
  - a Het zonnezeil wordt getroffen door  $N$  fotonen per seconde. Beredeneer dat de intensiteit  $I$  van de invallende zonnestraling dan geschreven kan worden als  $I = N \cdot E_f/A$ . Hierin is  $A$  de oppervlakte van het zonnezeil.
  - b Leid af dat de kracht  $F$  van die  $N$  fotonen per seconde op het zonnezeil dan gegeven wordt door  $F = 2 \cdot I \cdot A/c$ .
  - c Bereken de kracht die de zonnestraling op het zonnezeil uitoefent in de buurt van de aarde. Zie Binas voor de benodigde gegevens over de stralingsintensiteit van de zon.
  - d Bereken de snelheidstoename per dag van de sonde als gevolg van de in vraag c berekende kracht. Geef mogelijke verklaringen voor een andere uitkomst dan de in het artikel genoemde 160 km/h per dag.
- 2 Om uit te rekenen hoe de snelheid verandert als de sonde naar de rand van het zonnestelsel reist, moet je rekening houden met het afnemen van de stralingsintensiteit en met het afnemen van de gravitatiekracht van de zon naarmate de sonde zich verder van de aarde verwijdt.
 

Ontwerp, bouw en test een computermodel van de beweging van de sonde, met daarin verwerkt een afnemende lichtintensiteit en een afnemende gravitatiekracht van de zon. Sla het model op onder de naam *zonnezeil*. De gravitatiekracht van de planeten en manen die de sonde op zijn reis naar de rand van het zonnestelsel passeert, kun je buiten beschouwing laten.

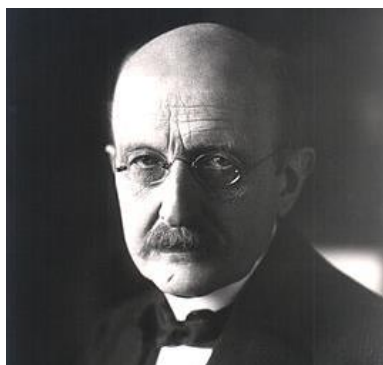
### Basismodel

Gebruik bij het ontwerpen en bouwen van de computermodellen het 'basismodel voor kracht en beweging'. Maak daarbij een keuze voor een tekstmodel met rekenregels en startwaarden of voor een grafisch model.

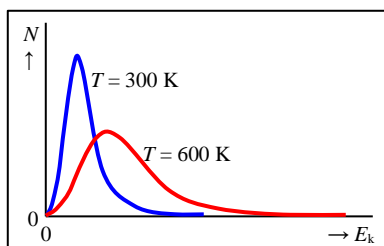
- a** Onderzoek met het model of de snelheid van de sonde in drie jaar tijd oploopt tot de in het artikel genoemde 160.000 km/h. En bepaal met het model hoe lang de reis van de sonde naar de rand van het zonnestelsel zal gaan duren. Zie Binas voor de benodigde gegevens over de afstanden in het zonnestelsel.
- b** Onderzoek met het model het effect van alleen een afnemende stralingsintensiteit en van alleen een afnemende gravitatiekracht. Welke van deze twee factoren heeft het grootste effect op de snelheidsverandering en de reisduur naar de rand van het zonnestelsel?

## 9 Planckkrommen

In deze opdracht ontdek je met een computermodel hoe de formule ‘achter’ de planckkrommen eruit ziet.



Figuur 1 – Max Planck (1858-1947).



Figuur 2 – Het aantal gasmoleculen  $N$  als functie van de kinetische energie  $E_k$  van die gasmoleculen bij verschillende waarden van de temperatuur  $T$ .

De theoretische planckkrommen zijn exact te berekenen met een in 1900 door Max Planck afgeleide formule. Deze formule geeft het door een oppervlak van  $1 \text{ m}^2$  in alle richtingen uitgezonden stralingsvermogen in een golflengtegebied van  $1 \text{ nm}$  als functie van de golflengte van de straling, afhankelijk van de absolute temperatuur van het stralende oppervlak.

De door Planck gegeven afleiding is te lastig om hier te volgen. We beperken ons daarom tot enkele belangrijke ideeën achter en het resultaat van die afleiding.

### Stralingspakketjes

Planck baseerde zich in eerste instantie op het idee van bewegende moleculen in een gas, al eerder als eerste wiskundig uitgewerkt door James Clark Maxwell in 1866 en later aangescherpt door Ludwig Boltzmann in zijn kinetische gastheorie. Het uitgangspunt van deze theorie is dat de kinetische energie van de moleculen in een gas statistisch verdeeld is over de gasmoleculen, met een kleine kans op een kleine of grote kinetische energie en een grotere kans op een kinetische energie daar tussenin. Als het aantal gasmoleculen met een bepaalde waarde van de kinetische energie wordt uitgezet tegen die kinetische energie, dan ontstaat een diagram zoals dat van figuur 2. Uit dat diagram blijkt dat er relatief weinig gasmoleculen zijn met een kleine of een grote waarde van de kinetische energie, en dat er relatief veel gasmoleculen zijn met een kinetische energie rond de gemiddelde waarde. Voor die gemiddelde waarde van de kinetische energie van de gasmoleculen geldt:

$$E_{k,\text{gem}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$$

In deze formule is  $k_B$  de *constante van Boltzmann* en  $T$  de absolute temperatuur.

Bij een toename van de temperatuur  $T$  zal dus de gemiddelde kinetische energie  $E_{k,\text{gem}}$  van de gasmoleculen toenemen. Het idee van Planck was: als straling nu eens – net als een gas – uit ‘deeltjes’ zou bestaan, dan zou de energie van die ‘deeltjes’ op eenzelfde manier over die ‘deeltjes’ verdeeld kunnen zijn als de verdeling van de kinetische energie over de moleculen van een gas. Bij straling zouden die ‘deeltjes’ dan afzonderlijke ‘stralingspakketjes’ zijn. En net zoals je moleculen met een bepaalde energie kunt ‘tellen’, zou dat ook met die stralingspakketjes moeten kunnen. Planck nam aan dat de energie  $E$  van die stralingspakketjes evenredig moest zijn met de frequentie:  $E = h \cdot f$ . Hierin is  $f$  de frequentie van de straling en  $h$  een constante die Planck nog moest bepalen. Zo’n stralingspakketje werd door Planck een *quantum* genoemd. Tegenwoordig spreken we over een *foton*.

### Planckverdeling

Planck ging vervolgens op zoek naar een passende functie waarin de energieverdeling van de stralingspakketjes als functie van de frequentie  $f$  met de waarnemingen overeen kwam. In de praktijk wordt langs de horizontale as van een stralingskromme niet de frequentie  $f$  maar de golflengte  $\lambda$  uitgezet. In afwijking van wat Planck zelf deed, zullen we nu direct verder werken met die golflengte in plaats van de frequentie. Gezien de vorm van de waargenomen stralingskrommen kwam Planck tot de conclusie dat het stralingsvermogen als functie van de golflengte er als volgt uit zou moeten zien:

$$P_\lambda = \frac{A}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{B}{\lambda}} - 1}$$

In deze formule is  $P_\lambda$  het uitgezonden stralingsvermogen per  $\text{m}^2$  in een klein

golflengtegebied rond een golflengte  $\lambda$ . In de formule zijn  $A$  en  $B$  nog te bepalen constanten.

- 1 Met een computermodel in Coach is relatief snel na te gaan of deze formule een stralingskromme levert die er ruwweg uit ziet zoals waargenomen. Maak een computermodel met de rekenregels en startwaarden uit figuur 3. Stel het aantal rekenstappen of *iteraties* in op 5000 (dit doe je bij *instelling*). Sla het model op onder de naam *planckkromme\_1*.

rekenregels	startwaarden
$L = L + dL$ $P = \frac{A}{L^5} * \frac{1}{e^{B/L} - 1}$	$L = 50$ [nm] $dL = 1$ [nm] $e = 2,7182818$ $A = \dots$ $B = \dots$

Figuur 3 – Computermodel van de stralingskromme in Coach6. Voor de golflengte  $\lambda$  is de letter L (de beginletter van Labda) gebruikt. De startwaarde van de golflengte  $\lambda$  is op 50 nm gezet, om eventuele problemen met delen door 0 te vermijden.

- a Laat Coach het diagram tekenen, met  $P$  langs de verticale en  $\lambda$  langs de horizontale as. Begin met  $A = 2000$  en  $B = 2000$  en experimenteer vervolgens met enkele verschillende grotere en kleinere waarden van  $A$  en  $B$ . Ga na of de stralingskrommen ruwweg de juiste vorm hebben. Let daarbij nog niet op de schaal van de assen in het diagram.
- b Probeer met het computermodel na te gaan in welke van de twee constanten  $A$  of  $B$  de absolute temperatuur  $T$  verwerkt moet zitten.

### Planckformule

Met zeer veel geduld heeft Plank – in die tijd nog zonder computer – de twee constanten in zijn formule bepaald, zodanig dat de berekende stralingskromme zo goed mogelijk overeenkwam met de waargenomen stralingskromme:

$$A = 2\pi \cdot h \cdot c^2$$

$$B = \frac{h \cdot c}{k_B \cdot T}$$

In deze formules is  $h$  de constante van Planck,  $c$  de lichtsnelheid,  $k_B$  de constante van Boltzmann, en  $T$  de absolute temperatuur.

De waarden van de lichtsnelheid en de constante van Boltzmann waren in die tijd al bekend. Planck kon nu uit een vergelijking van de theoretische en de waargenomen stralingskromme de waarde van de constante  $h$  bepalen.

Het invullen van de constanten  $A$  en  $B$  levert de planckformule voor de stralingskrommen:

$$P_{\lambda,T} = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k_B \cdot T}} - 1} \cdot \Delta\lambda$$

In deze formule is  $P_{\lambda,T}$  het uitgezonden stralingsvermogen per  $m^2$  in een golflengtegebied  $\Delta\lambda$  (meestal 1 nm of  $1 \cdot 10^{-9}$  m) rond een golflengte  $\lambda$  (in m) bij een temperatuur  $T$  (in K). De waarden van de constanten  $h$ ,  $c$  en  $k_B$  zijn te vinden in Binas.

- 2 Met een computermodel in Coach is na te gaan of deze formule juist is. Daarvoor moeten we het computermodel van figuur 3 aanpassen.

- a Ga na dat voor de constanten  $A$  en  $B$  in de formule van Planck geldt:

$$A = 3,75 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2$$

$$B = \frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{T} \text{ m}$$

- b Ga na dat het computermodel van figuur 4 in overeenstemming is met de planckformule voor de stralingskrommen. Verander het computermodel van figuur 3 in dat van figuur 4. Laat onder *instelling* het aantal rekenstappen of

iteraties op 5000 staan. Sla het model op onder de naam *planckkromme\_2*.

rekenregels	startwaarden
$L = L + dL$	$L = 50$ [nm]
$A = 3,75 \cdot 10^{-16}$	$dL = 1$ [nm]
$B = 1,44 \cdot 10^{-2}/T$	$e = 2,7182818$
$P = \frac{A}{(L \cdot 10^{-9})^5} \cdot \frac{1}{e^{B/(L \cdot 10^{-9})} - 1} \cdot 10^{-9}$	$T = \dots$ [K]

Figuur 4 – Computermodel van de stralingskromme in Coach6. Voor de golflengte  $\lambda$  is weer de letter L (de beginletter van Labda) gebruikt. De startwaarden voor  $\lambda$  en  $d\lambda$  zijn zo gekozen dat de horizontale as van het diagram de eenheid nm heeft, dezelfde eenheid als bij de stralingskrommen in Binas. In de rekenregels moet echter met de golflengte in m worden gerekend, met  $10^{-9}$  als omrekeningsfactor. Die omrekeningsfactor staat dan ook tweemaal in de tweede rekenregel achter het golflengtesymbool L. Voor het golflengtegebied  $\Delta\lambda$  is 1 nm gekozen: vandaar de laatste factor  $10^{-9}$  in de tweede rekenregel. De eenheid van het uitgezonden stralingsvermogen  $P$  is daardoor  $\text{Wm}^{-2}\text{nm}^{-1}$ , dezelfde eenheid als bij de stralingskrommen in Binas.

$T$ (K)	$\lambda_{\text{max}}$ ( $10^{-9}$ m)	$P$ ( $10^7$ W/m <sup>2</sup> )
2000		
3000		
4000		
5000		
6000		

Figuur 5 – Modelresultaten.

- c In Binas staan stralingskrommen voor verschillende waarden van de temperatuur. Vul een van deze temperatuurwaarden in het computermodel in, en controleer of de stralingskromme overeenkomt met die in Binas. Let nu wel op de schaal van de assen in het diagram.
- d Bepaal met het computermodel via *uitlezen* van het diagram de golflengte  $\lambda_{\text{max}}$  van het maximum in de stralingskromme voor een aantal verschillende waarden van de temperatuur  $T$ . Noteer de resultaten in de tabel van figuur 5. Laat zien dat deze resultaten in overeenstemming zijn met de *wet van Wien*, inclusief de in deze wet voorkomende evenredigheidsconstante  $k_W$ .
- e Bepaal met het computermodel via *analyse/verwerking* en *oppervlak* het in totaal over alle golflengten uitgezonden stralingsvermogen  $P$  voor een aantal verschillende waarden van de temperatuur  $T$ . Noteer de resultaten in de tabel van figuur 5. Laat zien dat deze resultaten in overeenstemming zijn met de *wet van Stefan-Boltzmann*, inclusief de in deze wet voorkomende evenredigheidsconstante  $\sigma$ .





## 10 Broeikaseffect

Op aarde is de temperatuur nu gemiddeld ruwweg 15 °C. Dat maakt de aarde leefbaar. Voor een groot deel hangt deze temperatuur af van de energiestroom vanuit de ruimte: de zonnestraling. Maar ook de atmosfeer van de aarde speelt daarbij een rol. Zonder atmosfeer zou de gemiddelde temperatuur op aarde rond de 0 °C liggen. Deze invloed van de atmosfeer op de gemiddelde temperatuur op aarde wordt het *broeikaseffect* genoemd. Dat broeikaseffect zorgt dus voor een leefbaar klimaat op aarde.



Figuur 1 – Op aarde zorgen de zon en de atmosfeer samen voor een leefbare temperatuur.

### Planeetmodel

In dit keuzeonderwerp gebruik je een sterk vereenvoudigd model van de aarde: een bol met overal eenzelfde soort oppervlak en dezelfde temperatuur. De atmosfeer van de aarde in dit model is een luchtlag boven het aardoppervlak met overal dezelfde samenstelling en temperatuur.

Ook de energiestromen die de aarde ontvangt en uitzendt zijn in dit model sterk vereenvoudigd. De aarde ontvangt een stralingsvermogen van de zon. Dit stralingsvermogen wordt door het aardoppervlak voor een deel teruggekaatst en voor de rest geabsorbeerd. Daarnaast zendt de aarde een infrarood stralingsvermogen uit dat afhankelijk is van de temperatuur van het aardoppervlak.

De werkelijkheid is veel ingewikkelder...

**Kernvraag** – Hoe hoog is de temperatuur op aarde zonder en met atmosfeer volgens een sterk vereenvoudigd model van de aarde en van de energiestromen die de aarde ontvangt en uitzendt?

### Een aarde zonder atmosfeer

Op het oppervlak van een aarde zonder atmosfeer valt elektromagnetische straling van de zon in. Dit invallende stralingsvermogen is constant. Het invallende stralingsvermogen wordt voor een deel teruggekaatst door het aardoppervlak. De rest van het invallende stralingsvermogen wordt door het aardoppervlak geabsorbeerd. Door die absorptie zou de temperatuur van de aarde blijven stijgen, als er geen uitgaande straling zou zijn. Maar elk voorwerp met een temperatuur boven het absolute nulpunt straalt energie uit in de vorm van infraroodstraling. Dat geldt dus ook voor het aardoppervlak. Het uitgestraalde vermogen hangt af van de temperatuur: hoe hoger de temperatuur van het aardoppervlak is, des te groter is het uitgestraalde vermogen.

- 1 Leg uit dat een constant invallend vermogen en een temperatuurafhankelijk uitgestraald vermogen leidt tot een situatie van *evenwicht*. Of, met andere woorden, tot een situatie waarin het invallende en het uitgestraalde vermogen even groot zijn en de temperatuur van het aardoppervlak constant is.

Je gaat nu achtereenvolgens na met welke formules het invallend, gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen te berekenen zijn en welke temperatuur van het aardoppervlak dat oplevert op een aarde zonder atmosfeer. Daarna doe je hetzelfde voor een aarde met atmosfeer.

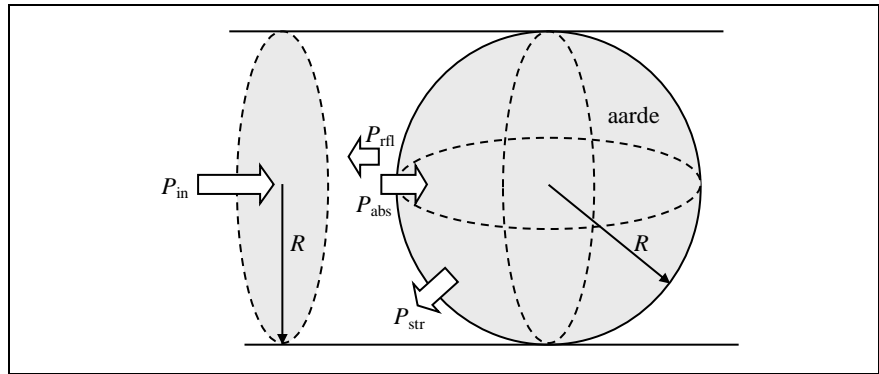
**Invallend vermogen** – De energiestroom van de zon naar de aarde, de zonneconstante (symbool:  $S_z$ ), is bekend:  $S_z = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ .

Omdat de afstand van de aarde tot de zon heel groot is ten opzichte van de diameter van de aarde, mag je uitgaan van een invallende *evenwijdige* bundel stralingsenergie (zie figuur 2). De doorsnede van de invallende bundel stralingsenergie is een cirkel met straal  $R$  die gelijk is aan de straal van de aarde. Het door de aarde onderschepte vermogen  $P_{\text{in}}$  wordt dan gegeven door:

$$P_{\text{in}} = \pi \cdot R^2 \cdot S_z \quad [1]$$

In deze formule is  $S_z$  de zonneconstante en  $R$  de straal van de aarde.

Figuur 2 – De aarde ontvangt een stralingsvermogen  $P_{in}$  via een cirkeloppervlak  $\pi \cdot R^2$  en zendt een stralingsvermogen  $P_{str}$  uit via een boloppervlak  $4\pi \cdot R^2$ .



**Gereflecteerd vermogen** – Het invallende vermogen zal gedeeltelijk door het aardoppervlak worden gereflecteerd. De mate van reflectie hangt af van de reflectiecoëfficiënt van de aarde, de zogenaamde *albedo* (symbool:  $\alpha$ ). De albedo is de verhouding tussen het gereflecteerde en het invallende stralingsvermogen. Voor het door de aarde gereflecteerde vermogen  $P_{rfl}$  geldt dus:

$$P_{rfl} = \alpha \cdot P_{in} \quad [2]$$

De rest van het invallende vermogen wordt door het aardoppervlak geabsorbeerd. Voor het geabsorbeerde vermogen  $P_{abs}$  geldt dus:

$$P_{abs} = P_{in} - P_{rfl} = P_{in} - \alpha \cdot P_{in} = (1 - \alpha) \cdot P_{in} \quad [3]$$

In deze formule is  $\alpha$  de albedo van de aarde en  $P_{in}$  het op aarde invallende vermogen van formule [1].

**Uitgestraald vermogen** – Het door de aarde uitgestraalde vermogen hangt af van de temperatuur van het aardoppervlak. Voor dit uitgestraalde vermogen geldt de stralingswet van Stefan-Boltzmann: het uitgestraalde vermogen is evenredig met de grootte van het stralende oppervlak en met de vierde macht van de absolute temperatuur van dat oppervlak.

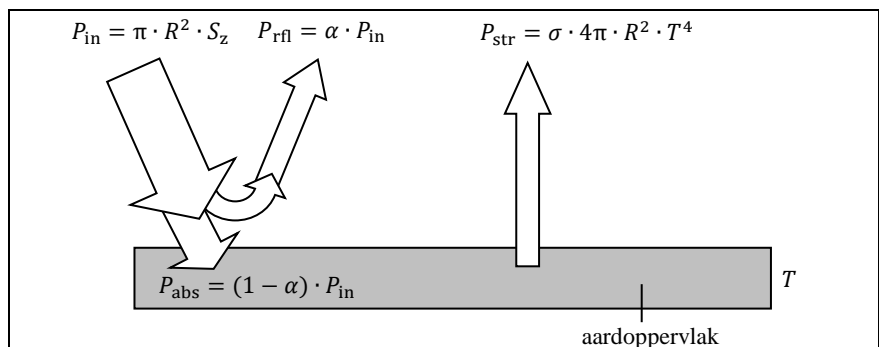
Voor het uitgestraalde vermogen  $P_{str}$  door een bolvormige aarde die overal dezelfde temperatuur  $T$  heeft, geldt dan:

$$P_{str} = \sigma \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot T^4 \quad [4]$$

In deze formule is  $\sigma$  de constante van Stefan-Boltzmann,  $T$  de absolute temperatuur van het aardoppervlak en  $R$  de straal van de aarde.

**Temperatuur** – Met de formules voor het invallend, gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen (zie figuur 3) is, voor dit sterk vereenvoudigde model van een aarde zonder atmosfeer, de temperatuur van het aardoppervlak te berekenen.

Figuur 3 – Het invallend, gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen bij een aarde zonder atmosfeer. Als het uitgestraald vermogen  $P_{str}$  gelijk is aan het geabsorbeerd vermogen  $P_{abs}$ , is de temperatuur  $T$  van het aardoppervlak constant.



Stel dat je begint met een koude aarde zonder zon en dat de zon wordt ‘aangezet’. De straling van de zon verwarmt de aarde, waardoor de oppervlaktetemperatuur van de aarde stijgt. Maar een stijgende oppervlaktetemperatuur betekent dat de aarde zelf meer infraroodstraling gaat uitzenden. Er zal zich een evenwicht instellen, waarbij het uitgestraalde vermogen gelijk is aan het geabsorbeerde vermogen.

oppervlak	albedo
sneeuw	0,80
besneeuwd bos	0,45
gras	0,23
loofbos (zomer)	0,18
steppe/naaldbos (zomer)	0,13
steen/rots	0,10
oceaan	0,07-0,20
cumuluswolken	0,70
altostratus/altocumulus-wolken	0,50
hoge cirruswolken	0,20

Figuur 4 – De albedo van verschillende soorten aardoppervlak.

2 De temperatuur  $T$  van het aardoppervlak is constant als er evenwicht is tussen het geabsorbeerde en uitgestraalde vermogen:  $P_{str} = P_{abs}$ .

a Laat zien dat de temperatuur  $T$  van een aarde zonder atmosfeer gegeven wordt door:

$$T^4 = \frac{1 - \alpha}{4 \cdot \sigma} \cdot S_z$$

In deze formule is  $\alpha$  de albedo van de aarde,  $\sigma$  de constante van Stefan-Boltzmann en  $S_z$  de zonneconstante.

b Maak met behulp van de albedo van de verschillende soorten aardoppervlak in de tabel van figuur 4 een beredeneerde schatting van de albedo van een aarde zonder atmosfeer.

c Bereken met de temperatuurformule van opdracht 2a en de albedo van opdracht 2b de temperatuur  $T$  van een aarde zonder atmosfeer, en vergelijk je antwoord met de in de inleiding van dit keuzeonderwerp genoemde waarde.

d Leg met de temperatuurformule uit hoe de temperatuur op aarde verandert als de zonneconstante groter of kleiner zou zijn dan  $1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ .

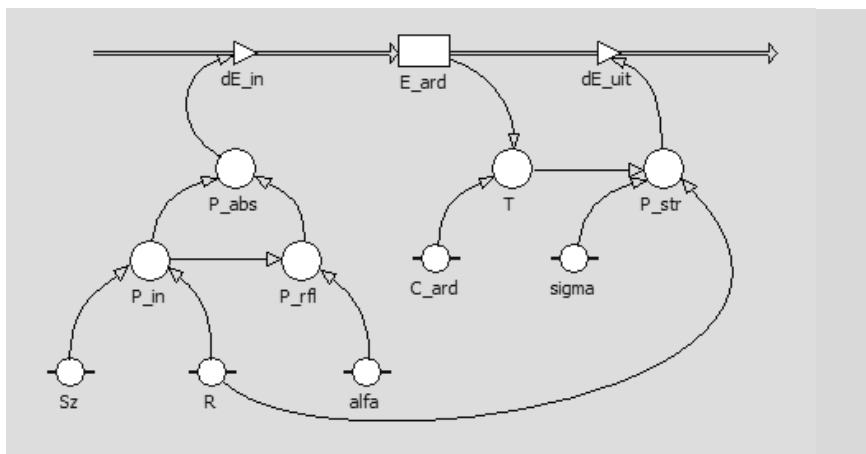
e Leg met de temperatuurformule uit hoe de temperatuur op aarde verandert als de albedo groter of kleiner zou zijn dan de albedo van opdracht 2b.

3 Het berekenen van de temperatuur van een aarde zonder atmosfeer kan ook met het computermodel van figuur 5 en 6. Dit model werkt met een zonneconstante  $S_z = 1,4 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ , een straal  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  van de aarde, een albedo  $\alpha = 0,1$  van het aardoppervlak en een warmtecapaciteit  $C_{ard} = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ J/K}$  van de aarde.

Rekenregels	startwaarden
1 $t = t + dt$	$t = 0$
2 $P_{in} = S_z \cdot 3,14 \cdot R^2$	$dt = 0,1$
3 $P_{rfl} = \alpha \cdot P_{in}$	$S_z = 1,4 \cdot 10^3$
4 $P_{abs} = P_{in} - P_{rfl}$	$R = 6,4 \cdot 10^6$
5 $P_{str} = \sigma \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot R^2 \cdot T^4$	$\alpha = 0,1$
6 $E_{ard} = E_{ard} + P_{abs} \cdot dt - P_{str} \cdot dt$	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$
7 $T = E_{ard} / C_{ard}$	$E_{ard} = 0$
	$C_{ard} = 0,5 \cdot 10^{15}$

Figuur 5 – Tekstmodel in Coach6 van een aarde zonder atmosfeer.

Figuur 6 – Grafisch model in Coach6 van een aarde zonder atmosfeer. De grootheden  $P_{in}$ ,  $P_{rfl}$ ,  $P_{abs}$ ,  $P_{str}$  en  $T$  in dit model zijn op dezelfde manier gedefinieerd als in de rekenregels 2 t/m 5 en 7 van het tekstmodel in Coach. Voor de in- en uitstroomgrootheden  $dE_{in}$  en  $dE_{uit}$  geldt:  $dE_{in} = P_{abs} \cdot dt$  en  $dE_{uit} = P_{str} \cdot dt$ . Daarbij vermenigvuldigt het model automatisch de beide vermogens met de grootte van de tijdstap  $dt$ , en berekent dus de per tijdstap door de aarde geabsorbeerde en uitgestraalde energie.



Het model berekent per tijdstap een ‘energie-inhoud’  $E_{ard}$  van de aarde uit een toevoer van energie via het door de aarde geabsorbeerde vermogen  $P_{abs}$  en een afvoer van energie via het door de aarde uitgezonden stralingsvermogen  $P_{str}$ . De temperatuur  $T$  van de aarde volgt dan uit het quotiënt van deze berekende ‘energie-inhoud’  $E_{ard}$  en de warmtecapaciteit  $C_{ard}$  van de aarde.

a Maak het computermodel van een aarde zonder atmosfeer. Sla het model op

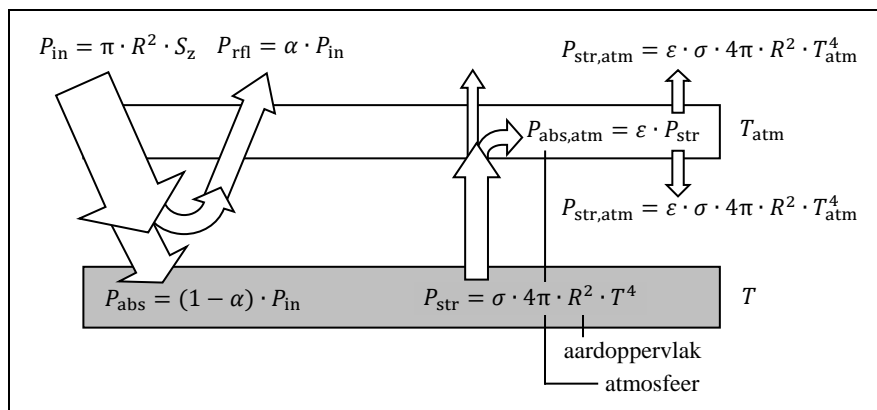
onder de naam *aarde\_zonder\_atmosfeer*. De waarde van  $C_{\text{ard}}$  is zo gekozen dat de evenwichtstemperatuur wordt bereikt binnen de standaard-looptijd van het model.

- b** Test het computermodel van een aarde zonder atmosfeer: is het verloop van de temperatuur  $T$  van de aarde in de tijd  $t$  zoals verwacht, en heeft de uiteindelijke evenwichtstemperatuur van de aarde een waarde zoals verwacht?
  - c** Laat met het computermodel zien dat een verandering van de straal  $R$  en/of de warmtecapaciteit  $C_{\text{ard}}$  van de aarde geen invloed heeft op de uiteindelijke evenwichtstemperatuur. Welke invloed hebben de waarden van  $R$  en/of  $C_{\text{ard}}$  dan wél?
  - d** Voorspel het effect op  $T$  van veranderingen in de zonneconstante  $S_z$  en de albedo  $\alpha$ , en controleer met het computermodel of je voorspellingen juist waren.
- 4** In ons zonnestelsel is Mars een planeet zonder atmosfeer, op een afstand van  $1,524 \times$  de afstand aarde-zon. Het Marsoppervlak heeft een albedo van 0,15. Bepaal de temperatuur op Mars met de temperatuurformule van opdracht 2a en/of met het computermodel van opdracht 3.

### Een aarde met atmosfeer

Aan het vereenvoudigde model van een aarde zonder atmosfeer wordt nu in figuur 7 een atmosfeer toegevoegd in de vorm van een luchtlaag met overal dezelfde samenstelling en temperatuur. De formules voor het invallend, gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen veranderen niet. Wat wél verandert zijn de waarden van het gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen, doordat de waarde van de albedo  $\alpha$  verandert. In de atmosfeer komen namelijk wolken voor. Die wolken zorgen voor meer reflectie. Voor een aarde met atmosfeer – en dus met wolken – is een albedo van 0,33 een redelijke aanname. Dat is de albedo van de aarde zoals die er tegenwoordig uit ziet met zijn landoppervlak, oceanen en bewolking.

Figuur 7 – Het invallend, gereflecteerd, geabsorbeerd en uitgestraald vermogen bij een aarde met atmosfeer. De atmosfeer is in dit model weergegeven als een aparte laag boven het aardoppervlak. Als voor het aardoppervlak het uitgestraald en geabsorbeerd vermogen gelijk zijn, is de temperatuur  $T$  van het aardoppervlak constant. En als voor de atmosfeer het uitgestraald en geabsorbeerd vermogen gelijk zijn, is ook de temperatuur  $T_{\text{atm}}$  van de atmosfeer constant. De temperaturen  $T$  en  $T_{\text{atm}}$  zullen echter een verschillende waarde hebben.



**Atmosfeer: geabsorbeerd vermogen** – Het door de aarde uitgestraalde vermogen bestaat uit infraroodstraling, die voor een groot deel door sommige gassen in de atmosfeer, de waterdamp en de wolken wordt geabsorbeerd. De mate van absorptie wordt bepaald door de *absorptiecoëfficiënt* (symbool:  $\epsilon$ ) van de atmosfeer. Deze absorptiecoëfficiënt is de verhouding tussen het door de atmosfeer geabsorbeerde vermogen en het van beneden af naar de atmosfeer uitgestraalde vermogen. Voor het door de atmosfeer geabsorbeerde vermogen  $P_{\text{abs,atm}}$  geldt dan:

$$P_{\text{abs,atm}} = \epsilon \cdot P_{\text{str}} \quad [5]$$

In deze formule is  $\epsilon$  de absorptiecoëfficiënt van de atmosfeer en  $P_{\text{str}}$  het als infraroodstraling door het aardoppervlak uitgestraalde vermogen.

**Atmosfeer: uitgestraald vermogen** – Het door de atmosfeer geabsorbeerde vermogen zorgt voor een temperatuurstijging van de atmosfeer. Stel dat je begint met een koude atmosfeer. De infraroodstraling van de aarde verwarmt de

atmosfeer, waardoor de temperatuur van de atmosfeer stijgt. Maar een stijgende temperatuur van de atmosfeer betekent dat de atmosfeer zelf meer infraroodstraling gaat uitzenden. Er zal zich een evenwicht instellen, waarbij het door de atmosfeer uitgestraalde vermogen gelijk is aan het door de atmosfeer geabsorbeerde vermogen.

Het uitzenden van infraroodstraling door de atmosfeer gebeurt in twee richtingen: omhoog het heelal in en ook terug naar het aardoppervlak. In beide gevallen wordt dit door de atmosfeer uitgestraalde vermogen  $P_{\text{str,atm}}$  volgens de stralingswet van Stefan-Boltzmann gegeven door:

$$P_{\text{str,atm}} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot 4\pi \cdot R^2 \cdot T_{\text{atm}}^4 \quad [6]$$

In deze formule is  $\varepsilon$  de emissiecoëfficiënt van de atmosfeer (met dezelfde waarde als de absorptiecoëfficiënt),  $\sigma$  de constante van Stefan-Boltzmann,  $T_{\text{atm}}$  de temperatuur van de atmosfeer en  $4\pi \cdot R^2$  de stralende oppervlakte van de atmosfeer (ongeveer gelijk aan de oppervlakte van de aarde).

De absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$  van de atmosfeer hangt af van de hoeveelheden broeikasgassen zoals  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$  en  $\text{CH}_4$ . Voor de huidige atmosfeer van de aarde is  $\varepsilon = 0,80$  een redelijke waarde.

Het door de atmosfeer in de richting van de aarde uitgestraalde vermogen  $P_{\text{str,atm}}$  wordt door het aardoppervlak weer geabsorbeerd. Door de aanwezigheid van de broeikasgassen in de atmosfeer krijgt het aardoppervlak dus een deel van het als infraroodstraling uitgezonden stralingsvermogen  $P_{\text{str}}$  weer terug.

**Temperatuur** – Ook in de situatie van een aarde met atmosfeer zal zich een evenwicht instellen tussen het geabsorbeerde en uitgestraalde vermogen bij een constante temperatuur, zowel voor het aardoppervlak als voor de atmosfeer. Met het sterk vereenvoudigde model van een aarde met atmosfeer in figuur 7 is weer de temperatuur van het aardoppervlak te berekenen.

**5** In de situatie van figuur 7 is sprake van evenwicht tussen het geabsorbeerde en uitgestraalde vermogen voor zowel de atmosfeer als het aardoppervlak.

**a** Leg uit dat bij evenwicht voor de atmosfeer volgens figuur 7 geldt:

$$P_{\text{abs,atm}} = 2 \cdot P_{\text{str,atm}}$$

**b** Leg uit dat bij evenwicht voor het aardoppervlak volgens figuur 7 geldt:

$$P_{\text{abs}} + P_{\text{str,atm}} = P_{\text{str}}$$

Uit de vergelijkingen van opdracht **5a** en **5b** volgen twee verbanden tussen de temperatuur  $T$  van het aardoppervlak en de temperatuur  $T_{\text{atm}}$  van de atmosfeer. Het combineren van deze twee verbanden (en het daarbij ‘wegwerken’ van  $T_{\text{atm}}$ ) levert een formule voor de temperatuur  $T$  van het aardoppervlak.

**c** Laat zien dat de temperatuur  $T$  van het aardoppervlak gegeven wordt door:

$$T^4 = \frac{1 - \alpha}{(4 - 2 \cdot \varepsilon) \cdot \sigma} \cdot S_z$$

In deze formule is  $\alpha$  de albedo van de aarde,  $\varepsilon$  de absorptie/emissiecoëfficiënt van de atmosfeer,  $\sigma$  de constante van Stefan-Boltzmann en  $S_z$  de zonneconstante.

**d** Bereken met de temperatuurformule van opdracht **5c** de temperatuur  $T$  op een aarde met atmosfeer. Gebruik daarbij de eerder genoemde waarden van de albedo en de absorptiecoëfficiënt:  $\alpha = 0,33$  en  $\varepsilon = 0,80$ .

**e** Vergelijk je antwoord bij opdracht **5d** met de in de inleiding van dit keuzeonderwerp genoemde gemiddelde temperatuur op de echte aarde met atmosfeer. Wat is je conclusie?

**6** In opdracht 3 heb je een computermodel van een aarde zonder atmosfeer gebouwd en getest. Voor de atmosfeer kun je een vergelijkbaar computermodel maken. Door dat model te koppelen aan het model van een aarde zonder atmosfeer krijg je een model van een aarde met atmosfeer.

**a** Maak een computermodel van de atmosfeer, en koppel dit op de juiste manier aan het computermodel van een aarde zonder atmosfeer van opdracht 3. Sla het model op onder de naam *aarde\_met\_atmosfeer*. In het model van

### Planeettemperatuur

Met de temperatuurformules van opdracht **2a** en **5c** is ook de temperatuur op de andere planeten van ons zonnestelsel te berekenen. Daarbij moet dan wel rekening worden gehouden met een andere waarde van de zonneconstante vanwege de verschillen in afstand tot de zon. En verder zal de samenstelling van het planeetoppervlak en van de atmosfeer verschillen van die van de aarde. Daardoor is de albedo  $\alpha$  van het planeetoppervlak en de absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$  van de atmosfeer per planeet verschillend.



de atmosfeer is een waarde voor de warmtecapaciteit  $C_{\text{atm}}$  van de atmosfeer nodig. Neem daarvoor de waarde  $C_{\text{atm}} = 1 \cdot 10^{15}$  J/K. Opmerking: de gekozen waarde van  $C_{\text{atm}}$  heeft, net als eerder de in opdracht 3 gekozen waarde van  $C_{\text{ard}}$ , geen invloed op de uiteindelijke evenwichtstemperaturen van de aarde en de atmosfeer in het model, wel op de snelheid waarmee deze temperaturen vanaf 0 K naar hun evenwichtswaarde stijgen.

- b** Test het computermodel van een aarde met atmosfeer: is het verloop van de temperatuur  $T$  van de aarde en de temperatuur  $T_{\text{atm}}$  van de atmosfeer in de tijd  $t$  zoals verwacht, en hebben de uiteindelijke evenwichtstemperaturen van de aarde en de atmosfeer een waarde zoals verwacht?
- c** Voorspel het effect op  $T$  van veranderingen in de zonneconstante  $S_z$ , de albedo  $\alpha$  en de absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$ , en controleer met het computermodel of je voorspellingen juist waren.

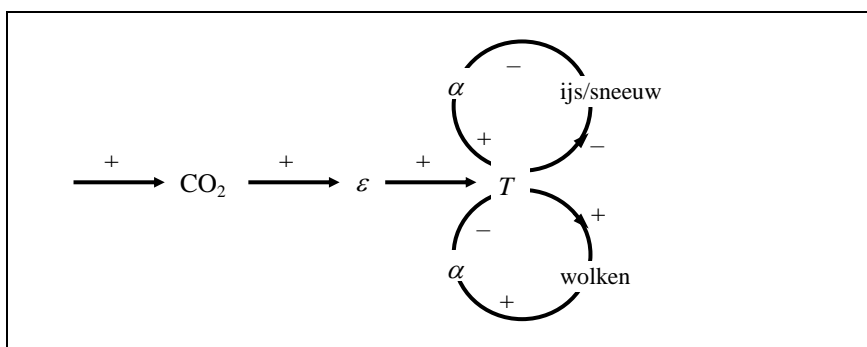
### Broeikasewfect

Het sterk vereenvoudigde model van een aarde met atmosfeer levert een hogere temperatuur van het aardoppervlak, vergeleken met het nog sterker vereenvoudigde model van een aarde zonder atmosfeer. Deze invloed van de atmosfeer op de temperatuur van het aardoppervlak noemen we het *broeikasewfect*.

- 7** Met de temperatuurformule van opdracht 5c is iets te zeggen over hoe de temperatuur op aarde zal veranderen door bijvoorbeeld een toename van de concentratie broeikasgassen in de atmosfeer.
  - a** Hoe verandert de absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$  van de atmosfeer bij een stijging van de concentratie broeikasgassen? Beredeneer welk effect dit heeft op de temperatuur  $T$  op aarde.
  - b** Leg uit welke effecten een stijging van de temperatuur  $T$  op aarde zou kunnen hebben op de albedo  $\alpha$ . Welk effect heeft zo'n verandering van de albedo dan op zijn beurt weer op de temperatuur  $T$  op aarde?

Er bestaat een relatie tussen de concentratie broeikasgassen en de absorptie/emissiecoëfficiënt van de atmosfeer. Een stijging van de concentratie broeikasgassen veroorzaakt een toename van de absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$ , en daarmee een stijging van de temperatuur  $T$  op aarde. Een hogere temperatuur op aarde veroorzaakt onder andere een afsmelten van gletsjers en ijskappen, waardoor de albedo  $\alpha$  van het aardoppervlak afneemt. En een lagere waarde van de albedo leidt op zijn beurt tot een verdere toename van de temperatuur  $T$  op aarde. Maar een hogere temperatuur op aarde kan ook een ander effect hebben: een toename van de bewolking, waardoor de albedo juist toeneemt en de temperatuur op aarde weer daalt. Er is, met andere woorden, sprake van *terugkoppeling*. Deze terugkoppeling kan positief of negatief zijn: een temperatuurstijging leidt tot een verdere temperatuurstijging of tot een temperatuurdaling (of op zijn minst een afzwakking van die verdere temperatuurstijging). In figuur 8 zijn deze kwalitatieve terugkoppelingsmechanismen schematisch weergegeven.

Figuur 8 – Kwalitatieve terugkoppelingsmechanismen in het model van een aarde met atmosfeer. De plus- en mintekens staan voor een toename en een afname van de grootte waarnaar de pijl verwijst.



De veranderende temperatuur op aarde is door te rekenen – als de relatie tussen de concentratie broeikasgassen en de absorptie/emissiecoëfficiënt van de atmosfeer bekend is, en als de relatie tussen de temperatuur en de albedo van het aard-

oppervlak bekend is. Onderzoek naar deze (en andere) relaties is het werk van klimaatwetenschappers.

Hieronder beperken we ons tot een voorbeeld van de manier van rekenen. In dat voorbeeld reken je beide terugkoppelingsmechanismen – eerst het effect van minder ijs en sneeuw, daarna het effect van meer bewolking – door.

### Computermodel

Het rekenwerk in opdracht 8 kun je natuurlijk door het in opdracht 6 gemaakte computermodel van een aarde met atmosfeer laten uitvoeren.

- 8** Het model van een aarde met atmosfeer levert – zoals al eerder berekend in opdracht 5 – een evenwichtstemperatuur  $T$  van 288 K (of +15 °C) bij een absorptie/emissiecoëfficiënt  $\varepsilon$  van 0,80 voor de atmosfeer en een albedo  $\alpha$  van 0,33 voor het aardoppervlak. Neem aan dat door een toename van de concentratie broeikasgassen over een bepaalde periode de absorptie/emissiecoëfficiënt van de atmosfeer 5 % toeneemt.
- a** Bereken (bij voorlopig gelijkblijvend albedo) de nieuwe waarde van de evenwichtstemperatuur. Welke temperatuurverandering heeft de toename van de concentratie broeikasgassen tot gevolg? Als gevolg van die hogere temperatuur zal het oppervlak van ijskappen en gletsjers afnemen. Neem aan dat de albedo van het aardoppervlak daardoor 3 % afneemt.
- b** Bereken de nieuwe waarde van de evenwichtstemperatuur. Welke extra temperatuurverandering heeft de toename van de concentratie broeikasgassen tot gevolg? Bij een stijging van de temperatuur op aarde zal de verdamping van water toenemen. Daardoor zal de bewolking en dus ook de reflectie van zonnestraling toenemen. Maar meer waterdamp in de atmosfeer betekent ook dat de absorptie van de door de aarde uitgezonden stralingsenergie in de atmosfeer toeneemt (ook waterdamp is een broeikasgas). Neem aan dat hierdoor de albedo van het aardoppervlak 6% toeneemt, en dat de absorptie/emissiecoëfficiënt van de atmosfeer 2% toeneemt.
- c** Bereken de nieuwe waarde van de evenwichtstemperatuur. Welke extra temperatuurverandering heeft de toename van de concentratie broeikasgassen tot gevolg?
- d** Leg uit welke onderzoeksgegevens klimaatwetenschappers nodig hebben om te kunnen voorspellen welke invloed de toename van de concentratie broeikasgassen zal hebben op de temperatuur  $T$  op aarde.

Door het broeikaseffect is de temperatuur op een aarde met atmosfeer hoger dan op een kale aarde zonder atmosfeer. Door de toename van de concentratie broeikasgassen in de atmosfeer van de aarde kan de temperatuur op aarde verder stijgen. Of dat ook zal gebeuren is met het sterk vereenvoudigde model van een aarde met atmosfeer niet na te gaan, want door een stijging van de temperatuur van de aarde zal de samenstelling van het aardoppervlak, de hoeveelheid bewolking en de concentratie broeikasgassen (in dit geval waterdamp) in de atmosfeer veranderen – met waarschijnlijk tegengestelde effecten op de temperatuur op aarde. Om dan de temperatuurverandering op aarde te kunnen voorspellen, zijn veel gedetailleerder modellen nodig waarin onder andere ook modellen voor de samenstelling van het aardoppervlak, de hoeveelheid bewolking en de hoeveelheid waterdamp in de atmosfeer zijn opgenomen. En dan gaat het alleen nog maar om de temperatuur op aarde als geheel. Voor het voorspellen van de temperatuur op verschillende plaatsen op aarde moeten de modellen nog gedetailleerder zijn.





## 11 Druk en temperatuur in sterren

### Levensloop van sterren

Het stermodel in dit keuzeonderwerp is dat van een hoofdreeksster als de zon, met waterstoffusie in het centrum als energiebron. Als het waterstof in het centrum van zo'n ster door kernfusie opdraakt, gaan andere kernfusieprocessen een rol spelen en komt de ster in het stadium van rode reus. Sterren met een massa kleiner dan  $8 \cdot M_{\text{zon}}$  eindigen na het stadium van rode reus als witte dwerg. Zwaardere hoofdreekssterren hebben na het stadium van rode reus een andere levensloop: zij eindigen na een supernova als neutronenster of zwart gat.

Het oppervlak van de zon heeft een temperatuur van  $5,78 \cdot 10^3$  K. In het centrum van de zon heersen andere omstandigheden: een temperatuur van  $1,55 \cdot 10^7$  K en een druk van  $2,33 \cdot 10^{16}$  Pa. Die temperatuur en druk zijn hoog genoeg om het optreden van kernfusie mogelijk te maken. De fusie van waterstofkernen is de energiebron van de zon, al zo'n vijf miljard jaar lang.

In die vijf miljard jaar is het stralingsvermogen van de zon ongeveer hetzelfde gebleven, zoals blijkt uit onderzoek van fossielen. De zon is dus al die tijd heel stabiel geweest, en zal dat de komende vijf miljard jaar waarschijnlijk ook wel blijven.

**Kernvraag** – Hoe is de stabiliteit van een ster als de zon te verklaren, hoe maak je een schatting van de druk en de temperatuur in het centrum van de zon en hoe is met een computermodel het verloop van de druk en de temperatuur vanuit het centrum naar de rand van de zon te berekenen?

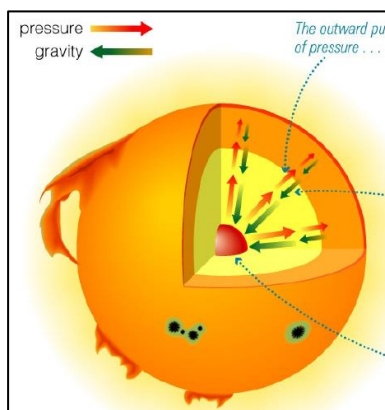
### Gasbol in evenwicht

Een ster is een gasbol die door zijn eigen gravitatiekracht bij elkaar wordt gehouden, tegen de druk van het gas in het centrum van de ster in. In dat centrum komt door kernfusie energie vrij, die aan het oppervlak wordt uitgestraald. Dit betekent dat er evenwicht moet zijn tussen de gasdruk die de ster laat uitzetten en de aantrekking door de gravitatiekracht. En dat er evenwicht is tussen de productie en de uitstraling van energie.

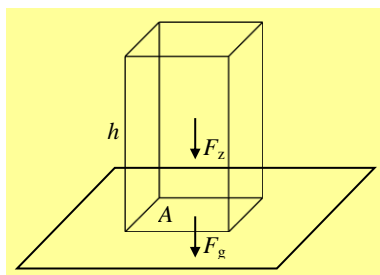
### Hydrostatisch evenwicht

Als de aantrekking door de gravitatiekracht zou winnen van de gasdruk, dan zou de ster inkrimpen – en in het uiterste geval helemaal instorten. En als de gasdruk het zou winnen van de gravitatiekracht, dan zou de ster uitzetten – en in het uiterste geval verdampen. Dit gebeurt niet, want een ster is heel stabiel. Er moet dus op alle dieptes in een ster een evenwicht zijn tussen de gasdruk en de gravitatiekracht op die diepte. We noemen dit het *hydrostatisch evenwicht*.

In de buitenste laag van een ster zijn de dichtheid en de druk van het gas vrijwel nul, maar met toenemende diepte in de ster nemen de dichtheid en de gasdruk toe – net als in de atmosfeer van de aarde. Op elke diepte moet de naar buiten gerichte gasdruk even groot zijn als de naar binnen (naar het centrum van de ster) gerichte gravitatiekracht. Als om de een of andere reden de druk in een laag op een bepaalde diepte kleiner of groter wordt, zal de ster iets inkrimpen of uitzetten. Hierdoor stijgt of daalt de gasdruk en wordt het evenwicht hersteld.



Figuur 1 – In een ster zijn op alle punten de gasdruk en de gravitatiekracht in evenwicht. De gasdruk neemt toe met toenemende diepte onder het steroppervlak.



Figuur 2 – De vloeistofkolom oefent een druk uit op het grondvlak.

- 1 De druk in het centrum van een ster is vrij eenvoudig te schatten. Onder water kan (de toename van) de druk op een diepte  $h$  onder het wateroppervlak worden berekend met behulp van het gewicht van de waterkolom erboven. Voor de druk  $p$  van die vloeistofkolom geldt:

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

In deze formule is  $p$  de druk (in Pa),  $\rho$  de dichtheid (in  $\text{kg/m}^3$ ) van de vloeistof,  $g$  de valversnelling (in  $\text{m/s}^2$ ) en  $h$  de diepte (in m) onder het vloeistofoppervlak.

- a Geef de afleiding van de formule voor de druk  $p$  van een vloeistofkolom. Ga daarbij uit van een vloeistofkolom met een hoogte  $h$ , een grondoppervlak  $A$  van  $1 \text{ m}^2$  en een dichtheid  $\rho$  van de vloeistof (zie figuur 2). Geef achtereenvolgens de formules voor het volume  $V$ , de massa  $m$ , het gewicht  $F_g$  en de druk  $p$  van deze vloeistofkolom.

Bij een vloeistofkolom verandert de dichtheid van de vloeistof niet al te veel bij toenemende diepte onder het vloeistofoppervlak. Bij een gas ligt dat anders, maar met deze formule is wél een ruwe schatting te maken van de druk in het centrum van de zon. De massa  $M_o$  en de straal  $R_o$  van de zon zijn

bekend (zie Binas).

- b** Om de druk in het centrum van de zon te berekenen, heb je een waarde van de dichtheid  $\rho$  nodig. Neem daarvoor (voor het gemak) de gemiddelde dichtheid van de zon. Bereken deze gemiddelde dichtheid.
- c** Om de druk in het centrum van de zon te berekenen, heb je een waarde van de valversnelling nodig. Neem daarvoor (voor het gemak) de valversnelling op het oppervlak van de zon. Bereken deze valversnelling.
- d** Maak nu een berekende schatting van de druk in het centrum van de zon. Dus: op een diepte  $h = R_{\odot}$ . Vergelijk het resultaat met de waarde in Binas en geef je commentaar.
- e** Op eenzelfde manier (dus: met dezelfde aannames als in opdracht 1**b** en **c**) is ook een schatting van de druk in het centrum van een willekeurige andere ster te maken. Laat zien dat voor deze druk  $p$  de volgende formule geldt:

$$p = \frac{3 \cdot G \cdot M^2}{4\pi \cdot R^4}$$

In deze formule is  $G$  de gravitatieconstante,  $M$  de massa en  $R$  de straal van de ster.

### Thermisch evenwicht

In een stabiele ster is sprake van energie-evenwicht: het uitgestraalde vermogen is gelijk aan het door kernfusie geproduceerde vermogen. Als het uitgestraalde vermogen groter zou zijn dan het geproduceerde vermogen, dan zou de ster netto energie verliezen en afkoelen. Dan zou de gasdruk afnemen, de gravitatiekracht winnen en de ster instorten. Anderzijds, als het geproduceerde vermogen groter zou zijn dan het uitgestraalde vermogen, dan zou de ster opwarmen. Door de hogere temperatuur zou de gasdruk toenemen, en zou de ster uitzetten – en dus niet stabiel zijn. We noemen dit evenwicht tussen uitgestraald en geproduceerd vermogen het *thermisch evenwicht*.

- 2** In opdracht 1 is een schatting gemaakt van de druk in het centrum van de zon. Als we nu ook de deeltjesdichtheid (in  $\text{mol/m}^3$ ) weten, dan is met behulp van de algemene gaswet ook een schatting te maken van de temperatuur in het centrum van de zon.  
Het centrum van de zon bestaat uit volledig geïoniseerd waterstof, dus uit losse protonen en elektronen. Beide soorten deeltjes dragen bij aan de druk, en het aantal deeltjes is dus  $2 \times$  zo groot als bij atomair waterstofgas.
  - a** Ga uit van de gemiddelde dichtheid van de zon en bereken de deeltjesdichtheid  $n/V$  in  $\text{mol/m}^3$ .
  - b** Maak met de algemene gaswet een schatting van de temperatuur in het centrum van de zon. Vergelijk het resultaat met de waarde in Binas en geef je commentaar.
- 3** Voor de fusie van waterstofkernen is een druk van minstens  $10^{14}$  Pa en een temperatuur van minstens  $10^7$  K nodig. Met een eenvoudig stermodel is in opdracht 1 en 2 een schatting gemaakt van de druk en de temperatuur in het centrum van de zon.  
Leg uit of kernfusie op grond van dit eenvoudige model een mogelijke energiebron van de zon is.
- 4** Waar haalt een ster als de zon de energie vandaan om eeuwenlang helder te blijven stralen? Tot in het begin van de twintigste eeuw is dit voor astronomen een onopgelost raadsel. Er zijn wel een paar ideeën: *verbranding* en *gravitatiecontractie*.  
Het idee van verbranding is gebaseerd op de waarneming dat het verbranden van brandstof (bijvoorbeeld steenkool) licht geeft. De zon zou dan uit een grote massa steenkool bestaan. Bij het langzaam verbranden van deze steenkool zou chemische energie vrijkomen in de vorm van stralingsenergie. De energie  $E$  die in totaal vrijkomt bij het verbranden van een ster met een massa  $M$  is dan te berekenen met  $E = M \cdot r_v$ . Hierin is  $r_v$  de verbrandingswarmte van steenkool.

Het idee van gravitatiecontractie heeft te maken met een theorie over het ontstaan van sterren: een ster ontstaat doordat materie in een uitgestrekte ijle gaswolk zich door de gravitatiekracht samentrekt. Dit proces wordt gravitatiecontractie genoemd. Tijdens dit proces neemt de gravitatie-energie van de materiedeeltjes ten opzichte van elkaar af. Die gravitatie-energie zou dan vrijkomen in de vorm van stralingsenergie. De energie  $E$  die in totaal vrijkomt bij het samentrekken van de gaswolk tot een ster met een massa  $M$  en een straal  $R$  is dan ruwweg te berekenen met  $E = 1,5 \cdot G \cdot M^2 / R$ . Hierin is  $G$  de gravitatieconstante.

Is de ouderdom van de zon te verklaren met de twee beschreven ideeën over de energieproductie in de zon, ervan uitgaande dat het stralingsvermogen van de zon redelijk constant is geweest?

- 5 Met behulp van de bij waterstoffusie vrijkomende energie is het mogelijk een ruwe schatting te maken van de levensduur van de zon. Waterstoffusie vindt alleen plaats in het centrum van de zon, omdat daar de temperatuur en druk voldoende hoog zijn. De massa van dit centrum is ruwweg 10% van de totale zonsmassa. Bij het proces van waterstoffusie in het centrum van de zon fuseren vier waterstofkernen (H-1) tot één heliumkern (He-4). Bij deze fusiereactie komt  $4,14 \cdot 10^{-12}$  J energie vrij. Een massa van 1 kg H-1 bevat  $6,0 \cdot 10^{26}$  kernen. Neem aan dat het centrum van de zon volledig bestaat uit waterstof, en dat alle waterstof wordt omgezet in helium. Neem verder aan dat het stralingsvermogen van de zon tijdens zijn levensduur constant is, en gelijk is aan het huidige stralingsvermogen. Hoe groot is ruwweg de levensduur van de zon?

De energie die in het centrum van een ster door kernfusie wordt geproduceerd moet naar buiten worden getransporteerd om uiteindelijk als straling door het steroppervlak te worden uitgezonden. Dat energietransport vindt op twee verschillende manieren plaats: door *straling* en door *convectie*.

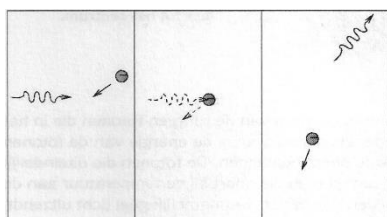
### Energietransport door straling

Bij de waterstoffusie in het centrum van de ster komt gammastraling vrij. De gammafotonen dragen hun energie over aan het gas rond dat centrum. Dat gas is volledig geïoniseerd. Er zijn dus geen gebonden elektronen en er is dus ook geen absorptie van fotonen door elektron-overgangen mogelijk. De overdracht van energie door fotonen vindt dan plaats door botsingen met vrije elektronen. Dit noemen we het *Compton-effect*.

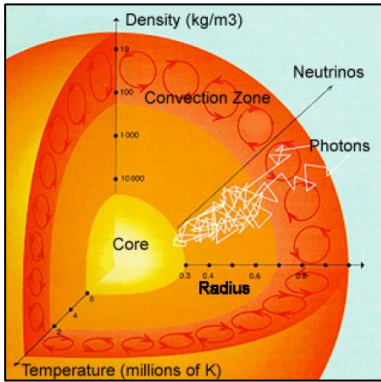
Als een foton tegen een vrij elektron botst, gaat het elektron even trillen door het elektrisch veld van het foton. Daarbij gaat een klein deel van de energie van het foton over op het elektron, waardoor de kinetische energie van het elektron toeneemt. Het foton wordt daarbij afgebogen in zijn baan: het wordt “verstrooid” (zie figuur 3). Je kunt ook zeggen dat het foton wordt geabsorbeerd en meteen weer uitgezonden, maar nu in een willekeurige richting en met iets minder energie. Het elektron draagt zijn kinetische energie over op het gas door middel van botsingen met andere elektronen en atoomkernen. Zo wordt het gas verhit door de energie die de fotonen verliezen.

Het hete gas straalt die energie weer uit door het uitzenden van fotonen met golflengtes volgens de planckromme die past bij de temperatuur van het gas. Ook deze uitgezonden fotonen worden weer verstrooid aan vrije elektronen en verhitten de lagen daarboven, enzovoort.

In een willekeurige laag van de ster komt de straling van alle kanten. Maar de lagen erboven zijn iets koeler dan de lagen eronder. Er komt dus meer straling van onderaf dan van bovenaf, en er is daardoor een netto energietransport naar boven (in de richting van het steroppervlak). De fotonen die daar aankomen zijn niet meer de gammafotonen die in het centrum zijn vrijgekomen. Op de reis naar boven is de energie van de fotonen steeds aangepast aan de lokale omstandigheden. De fotonen die de ster verlaten hebben dus een energie die hoort bij de temperatuur in de buitenste laag van de ster.



Figuur 3 – Verstrooiing van een foton aan een vrij elektron.



Figuur 4 – Energietransport in de zon. De in het centrum door waterstoffusie geproduceerde energie wordt in het inwendige van de zon getransporteerd door straling, en meer naar buiten toe door convectie.



Figuur 5 – Granulen op het oppervlak van de zon

### Energietransport door convectie

De buitenste lagen van een ster zijn relatief koel. Bij lagere temperaturen, onder de  $10^5$  K, is het waterstof in een ster niet meer volledig geïoniseerd en bestaat dus voor een deel uit waterstofatomen. Deze waterstofatomen absorberen fotonen, zodat het energietransport door straling in die buitenste lagen minder goed mogelijk is. Om de energie toch af te voeren, ontstaan dan hete gasbellen die opstijgen en koude gasbellen die dalen – vergelijkbaar met de convectie van verwarmde luchtballen in de atmosfeer van de aarde. Op het zonneoppervlak zijn deze stijgende en dalende gasbellen goed te zien in de vorm van granulen (zie figuur 5).

De borrelende lagen net onder het oppervlak van de zon zijn verantwoordelijk voor zonnevlekken, zonnevlammen en andere uitbarstingen aan het oppervlak van de zon.

### Computermodel van een ster

Een computermodel van het inwendige van een ster als de zon bestaat uit een aantal vergelijkingen voor de dichtheid  $\rho$ , de massa  $M$ , de druk  $p$ , de energieproductie  $L$  en de temperatuur  $T$ , allen als functie van de afstand  $r$  tot het centrum van de ster. Deze vergelijkingen zijn differentiaalvergelijkingen, die bovendien van elkaar afhankelijk zijn. Een computermodel kan dit stelsel van gekoppelde differentiaalvergelijkingen doorrekenen, en geeft een indruk van het verloop van de druk en de temperatuur vanaf het centrum naar de rand van de ster. Maar bij dat doorrekenen kunnen vrij snel allerlei ‘instabiliteiten’ optreden, waardoor het door de computer uitgevoerde rekenwerk uit de hand loopt...

Het computermodel van figuur 6 rekt vanuit het centrum van de zon naar de rand, beginnend met de startwaarde  $r = 0$  en een toename  $dr = 10^4$  van de afstand tot het centrum in elk van de opeenvolgende rekenstappen (rekenregel 1). Als het aantal rekenstappen wordt ingesteld op 39630, dan rekt het computermodel tot een afstand  $r = 3,963 \cdot 10^8$  m: de straal  $R$  van de zon.

	rekenregels	startwaarden
1	$r = r + dr$	$r = 0$
2	$\rho = 6,0 \cdot 10^{-5} \cdot p / T$	$dr = 10^4$
3	$M = M + 4 \cdot 3,14 \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dr$	$p = 2,33 \cdot 10^{16}$
4	$p = p - (G \cdot M \cdot \rho / r^2) \cdot dr$	$T = 1,55 \cdot 10^7$
		$M = 0$
		$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$

Figuur 6 – Computermodel van een ster zonder energieproductie in het centrum en zonder energietransport vanuit het centrum naar de rand.

Het complete computermodel bestaat uit de algemene gaswet (voor het berekenen van de dichtheid) en vijf differentiaalvergelijkingen voor het rekenwerk aan achtereenvolgens de massatoename, de drukafname, de energieproductie in het centrum en het energietransport vanuit het centrum naar de rand door straling en convectie.

**Algemene gaswet** – De eerste vergelijking in het computermodel is die voor de dichtheid  $\rho$ , afgeleid van de algemene gaswet:

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R \rightarrow \frac{p}{T} = \frac{n}{V} \cdot R = 2 \cdot \frac{\rho}{\mu} \cdot R \rightarrow \rho = \frac{\mu}{2 \cdot R} \cdot \frac{p}{T}$$

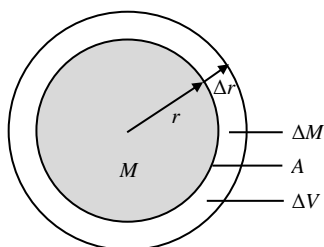
Bij het opstellen van deze vergelijking nemen we aan dat de ster (de zon) bestaat uit een bol van volledig geïoniseerd waterstof. Dat verklaart de factor 2 in de vergelijking: als elk waterstofatoom gesplitst is in twee deeltjes (een proton en een elektron), is de deeltjesdichtheid  $n/V$  in geïoniseerd waterstof  $2 \times$  zo groot als in atomaire waterstof. De grootte  $\mu$  in de vergelijking is de molaire massa van waterstof:  $\mu = 1,0 \cdot 10^{-3}$  kg/mol. De dichtheid  $\rho$  wordt dan in het computermodel (rekenregel 2) gegeven door:

$$\rho = 6,0 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{p}{T}$$

### Massatoename

Bij de opeenvolgende rekenstappen neemt de massa  $M$  van de bol met straal  $r$  toe met de massa  $\Delta M$  van een bolschil met (bij benadering) een oppervlakte  $A = 4\pi \cdot r^2$  en een dikte  $\Delta r$  (zie figuur 7):

$$\Delta M = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta r = \rho \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot \Delta r$$



Figuur 7

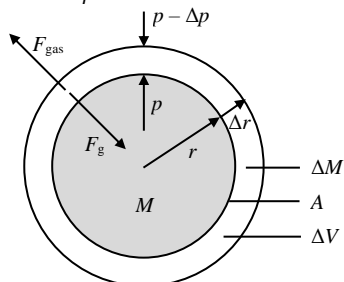
### Hydrostatisch evenwicht

Bij hydrostatisch evenwicht geldt dat de kracht op een bolschil als gevolg van de afname in gasdruk is gelijk aan de gravitatiekracht op die bolschil (zie figuur 8):

$$F_{\text{gas}} = F_g \rightarrow \Delta p \cdot A = \frac{G \cdot M \cdot \Delta M}{r^2}$$

Invullen van  $\Delta M = \rho \cdot A \cdot \Delta r$  en wegdelven van  $A$  levert:

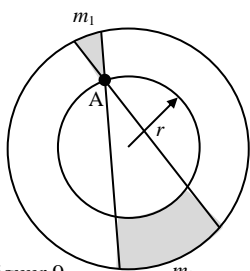
$$\Delta p = \frac{G \cdot \rho \cdot M}{r^2} \cdot \Delta r$$



Figuur 8

Voor het bepalen van de gravitatiekracht  $F_g$  hoeft alleen maar rekening te worden gehouden met de massa  $M$  binnen de bol met straal  $r$ .

Wiskundig is namelijk aan te tonen (zie figuur 9) dat de gravitatiekrachten van de massa's  $m_1$  en  $m_2$  buiten de bol op een massa in een punt als A elkaar opheffen.



Figuur 9

In het computermodel zijn dan startwaarden nodig voor  $p$  en  $T$  in het centrum van de zon (zie Binas):  $p = 2,33 \cdot 10^{16}$  Pa en  $T = 1,55 \cdot 10^7$  K. De waarden van  $p$  en  $T$  in de opeenvolgende rekenstappen volgen uit de berekeningen hieronder.

**Massatoename** – De druk  $p$  op een afstand  $r$  van het centrum van de ster hangt onder andere af van de massa  $M$  van de ster binnen de bol met straal  $r$  (zie hieronder bij 'hydrostatisch evenwicht'). Bij elke rekenstap neemt de straal  $r$  van de bol toe met  $dr$ , neemt het volume toe met  $4\pi \cdot r^2 \cdot dr$  en neemt de massa toe met  $4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dr$  (zie het kader 'Massatoename' hiernaast). Dit is te schrijven in de vorm van de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \rightarrow dM = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dr$$

De massa  $M$  wordt dan in het computermodel (rekenregel 3) in de opeenvolgende rekenstappen gegeven door:

$$M = M + dM = M + 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot dr$$

In het computermodel is dan een startwaarde nodig voor  $M$  in het centrum van de zon:  $M = 0$  (voor een bol met straal  $r = 0$ ).

**Hydrostatisch evenwicht** – De gasdruk  $p$  neemt van binnen naar buiten af. De kracht op een bolschil als gevolg van dit verschil in gasdruk moet evenwicht maken met de gravitatiekracht op deze bolschil (zie het kader 'Hydrostatisch evenwicht' hiernaast). Deze evenwichtsvoorwaarde leidt tot de volgende differentiaalvergelijking (met  $M$  de massa binnen een bol met straal  $r$  volgens rekenregel 3):

$$\frac{dp}{dr} = \frac{G \cdot \rho \cdot M}{r^2} \rightarrow dp = \frac{G \cdot \rho \cdot M}{r^2} \cdot dr$$

De druk  $p$  wordt dan in het computermodel (rekenregel 4) in de opeenvolgende rekenstappen gegeven door:

$$p = p - dp = p - \frac{G \cdot \rho \cdot M}{r^2} \cdot dr$$

In het computermodel is dan de waarde van de gravitatieconstante  $G$  nodig. De andere waarden in de vergelijking volgen uit de voorafgaande rekenregels en hun bijbehorende startwaarden.

- 6 Bouw het computermodel van de zon met de rekenregels en startwaarden uit figuur 6. Sla het model op onder de naam *ster\_1*.
  - a Voorspel hoe de druk  $p$ , de temperatuur  $T$  en de dichtheid  $\rho$  zullen veranderen als functie van de afstand  $r$  tot het centrum.
  - b Voeg aan het model een  $p,r$ -diagram [1], een  $T,r$ -diagram [2] en een  $\rho,r$ -diagram [3] toe. Laat het model lopen, en controleer je voorspellingen van opdacht 6a. Let daarbij ook op de startwaarden (bij  $r = 0$ ) in elk van de drie diagrammen. Verklaar zo nodig de verschillen tussen je voorspellingen en de modelresultaten.

**Energieproductie** – De aanname is dat de energieproductie in het centrum door waterstoffusie beperkt is tot een bol met een straal  $r = 0,2 \cdot R$ . De energieproductie  $dL$  in een bolschil met straal  $r$  en dikte  $dr$  hangt af van de massa van die bolschil (ofwel het volume en de dichtheid) en de per kg vrijkomende energie  $\varepsilon$  (zie het kader 'Thermisch evenwicht' op de volgende bladzijde). Dit leidt tot de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \varepsilon$$

De energieproductie  $L$  wordt dan in het computermodel (rekenregel 5) in de opeenvolgende rekenstappen gegeven door:

$$L = L + dL = L + 4\pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot dr$$

In het computermodel is dan een startwaarde nodig voor  $L$  in het centrum van de zon:  $L = 0$  (voor een bol met straal  $r = 0$ ).

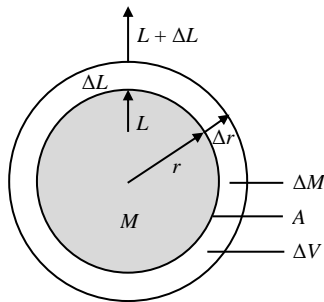
De waarde van  $\varepsilon$  (symbool  $e$  in het computermodel) is te berekenen uit de



### Thermisch evenwicht

Bij thermisch evenwicht geldt dat de energie die een bolschil uit gaat gelijk is aan de energie  $L$  die de bolschil in gaat plus de in de bolschil geproduceerde energie  $\Delta L$  (zie figuur 10):

$$L = L + \Delta L$$



Figuur 10

Als er in de bolschil geen energie wordt geproduceerd, geldt dus dat de energie die de bolschil uit gaat gelijk is aan de energie die de bolschil in gaat (ondanks dat het buitenoppervlak van de bolschil groter is dan het binnenoppervlak).

energieopbrengst van kernfusiereacties:  $\epsilon = 5,4$ . Dit geldt alleen voor een bol met een straal  $r < 0,2 \cdot R = 1,3926 \cdot 10^8$  m. Buiten die bol treden geen kernfusiereacties meer op, en geldt  $\epsilon = 0$ . Dit laatste betekent dat de energie  $L$  die een bolschil in gaat gelijk is aan de energie  $L$  die de bolschil uit gaat, zodat voor de opeenvolgende rekenstappen in het computermodel geldt:  $L = L$ .

Dit alles is verwerkt in de rekenregels en startwaarden van figuur 11 als aanvulling op die van figuur 6.

	rekenregels	startwaarden
5	Als $r < 1,3926 \cdot 10^8$ Dan $L = L + 4 \cdot 3,14 \cdot r^2 \cdot \rho \cdot \epsilon$ Anders $L = L$ Eindals	$L = 0$ $\epsilon = 5,4$ $s = 5,67 \cdot 10^{-8}$
6	$T = T - (L / (4 \cdot 3,14 \cdot r^2)) \cdot (6,56 \cdot 10^{-2} \cdot \rho / (s \cdot T^3)) \cdot dr$	

Figuur 11 – Computermodel van een ster met energieproductie in het centrum en met energietransport door straling vanuit het centrum naar de rand.

**Energietransport door straling** – In het computermodel van figuur 11 staat ook een rekenregel voor de temperatuur als gevolg van energietransport door straling. De in het centrum geproduceerde energie wordt namelijk vanuit het centrum naar de rand getransporteerd, allereerst door straling. Voor dit energietransport door straling geldt de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{L}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{6,56 \cdot 10^{-2} \cdot \rho}{\sigma \cdot T^3}$$

De afleiding van deze differentiaalvergelijking is nogal ingewikkeld, en voert te ver voor dit keuzeonderwerp.

De temperatuur  $T$  wordt dan in het computermodel (rekenregel 6) in de opeenvolgende rekenstappen gegeven door:

$$T = T - dT = T - \frac{L}{4\pi \cdot r^2} \cdot \frac{6,56 \cdot 10^{-2} \cdot \rho}{\sigma \cdot T^3} \cdot dr$$

In het computermodel is dan de waarde van de constante van Stefan-Boltzmann  $\sigma$  nodig (symbool  $s$  in het computermodel). De andere waarden in de vergelijking volgen uit de voorafgaande rekenregels en hun bijbehorende startwaarden.

- 7 Vul het computermodel van de zon aan met de rekenregels en startwaarden uit figuur 11. Sla het model op onder de naam *ster\_2*.
  - a Voorspel hoe de energieproductie  $L$  en de temperatuur  $T$  zullen veranderen als functie van de afstand  $r$  tot het centrum.
  - b Voeg aan het model in het  $T, r$ -diagram [2] een  $L, r$ -diagram toe (met  $L$  op de verticale as rechts in het diagram). Laat het model lopen, en controleer je voorspellingen van opdracht 7a. Let daarbij ook op de startwaarden (bij  $r = 0$ ) in het  $T, r$ -diagram en het  $L, r$ -diagram, en op de in totaal in het centrum geproduceerde energie (de waarde van  $L$  bij  $r = 0,2 \cdot R$  moet gelijk zijn aan het door de zon in totaal uitgestraalde vermogen). Verklaar zo nodig de verschillen tussen je voorspellingen en de modelresultaten. En leg uit dat de ‘knik’ in de energieproductie bij  $r = 0,2 \cdot R$  in werkelijkheid meer geleidelijk zal verlopen.
  - c Controleer of het verloop van de druk  $p$  en de dichtheid  $\rho$  in dit nieuwe computermodel nog steeds is zoals verwacht.
  - d De aanname is dat de energieproductie in het centrum door waterstoffusie beperkt is tot een bol met een straal  $r = 0,2 \cdot R$ . Dat betekent dat op die afstand tot het centrum de druk en de temperatuur beide nog net hoog genoeg moeten zijn voor het optreden van waterstoffusie:  $p \approx 10^{14}$  Pa en  $T \approx 10^7$  K (zie opdracht 3). Controleer of het computermodel ruwweg aan deze voorwaarde voldoet.
  - e Welke waarde heeft de temperatuur  $T$  volgens het computermodel aan de rand van de zon? En welke waarde zou dat ruwweg moeten zijn?

**Energietransport door convectie** – In het computermodel daalt de temperatuur  $T$  met toenemende afstand  $r$  van het centrum naar een waarde van  $T \approx 3 \cdot 10^6$  K. Dit is veel hoger dan de oppervlaktetemperatuur van de zon ( $T \approx 6 \cdot 10^3$  K). Energietransport door alleen straling in het computermodel levert dus een te hoge temperatuur aan de rand van de zon. Er is dan ook in de buitenste lagen van de zon sprake van een andere vorm van energietransport: energietransport door convectie. De aanname is dat buiten een bol met een straal  $r = 0,7 \cdot R = 4,8741 \cdot 10^8$  m het energietransport alleen plaatsvindt door convectie. Voor dit energietransport door convectie geldt de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT}{dr} = 0,409 \cdot \frac{T}{p} \cdot \frac{G \cdot M \cdot \rho}{r^2}$$

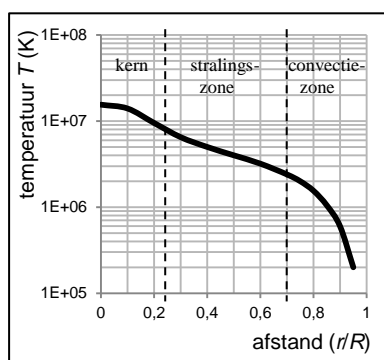
De afleiding van ook deze differentiaalvergelijking is nogal ingewikkeld, en voert te ver voor dit keuzeonderwerp.

De temperatuur  $T$  wordt dan in het computermodel vanaf een afstand  $r = 0,7 \cdot R$  van het centrum in de opeenvolgende rekenstappen gegeven door:

$$T = T - dT = T - 0,409 \cdot \frac{T}{p} \cdot \frac{G \cdot M \cdot \rho}{r^2} \cdot dr$$

Alle waarden in deze vergelijking volgen uit de voorafgaande rekenregels en hun bijbehorende startwaarden.

- 8** In het computermodel van de zon in figuur 11 heeft rekenregel 6 betrekking op het temperatuurverloop bij energietransport door straling.
- a** Verander rekenregel 6 in het computermodel, zodat er sprake is van energietransport door straling tot  $r = 0,7 \cdot R$  en energietransport door convectie vanaf  $r = 0,7 \cdot R$ . Sla het model op onder de naam *ster\_3*.
- b** Voorspel hoe de temperatuur  $T$  zal veranderen als functie van de afstand  $r$  tot het centrum.
- c** Laat het model lopen, en controleer je voorspelling van opdracht **8b**. Let daarbij ook op de startwaarde (bij  $r = 0$ ), de overgang tussen de twee vormen van energietransport (bij  $r = 0,7 \cdot R$ ) en de eindwaarde (bij  $r = R$ ). Verklaar zo nodig het verschil tussen je voorspelling en het modelresultaat. En leg uit dat de ‘knik’ in de temperatuur bij  $r = 0,7 \cdot R$  in werkelijkheid meer geleidelijk zal verlopen.
- d** Controleer of het verloop van de druk  $p$ , de dichtheid  $\rho$  en de energieproductie  $L$  in dit nieuwe computermodel nog steeds is zoals verwacht.



Figuur 12 – Temperatuurverloop in een meer geavanceerd stermodel.

Het complete computermodel van opdracht 8 geeft een redelijk beeld van het verloop van de druk  $p$ , de dichtheid  $\rho$ , de energieproductie  $L$  en de temperatuur  $T$  als functie van de afstand  $r$  tot het centrum van een ster als de zon. De waarde van  $\varepsilon$  in de vergelijking voor de energieproductie en de waarden van de evenredigheidsconstanten  $6,56 \cdot 10^{-2}$  en  $0,409$  in de vergelijkingen voor de temperatuur leveren een redelijke overeenkomst tussen het modelresultaat en de werkelijke oppervlaktetemperatuur van de zon.

- 9** In figuur 12 zie je het temperatuurverloop in een meer geavanceerd computermodel van de zon. Vergelijk dit modelresultaat met het resultaat van het computermodel bij opdracht 8. Wat is je conclusie?
- 10** Bij andere waarden van  $\varepsilon$  in de vergelijking voor de energieproductie (rekenregel 5) en van de evenredigheidsconstanten in de twee vergelijkingen voor de temperatuur (rekenregel 6) wordt het computermodel bij opdracht 8 al snel ‘instabiel’.
- a** Ga na of het computermodel nog steeds werkt bij bijvoorbeeld een 10% grotere en kleinere waarde van  $\varepsilon$  in de vergelijking voor de energieproductie.
- b** Ga na of het computermodel nog steeds werkt bij bijvoorbeeld een 10% grotere en kleinere waarde van elk van de evenredigheidsconstanten in de twee vergelijkingen voor de temperatuur bij de verschillende vormen van energietransport.





## Bronnen

**Radioactief verval** – *Newton 4v* (4<sup>e</sup> druk), hoofdstuk 5 *Straling en gezondheid* | *Ioniserende straling*, werkblad opdracht 70.

**Tijdrit Tour de France 1989** – NiNa-module 4v (2012) *Wisselwerking en beweging 1* | *Kracht en beweging*, paragraaf 3.3.

**Planeetbanen** – *Newton 5v* (4<sup>e</sup> druk), hoofdstuk 10 *Zonnestelsel* | *Cirkelbaan en gravitatiekracht*, werkblad opdracht 63.

**Planckkrommen** – *Newton 6v* (4<sup>e</sup> druk), hoofdstuk 13 *Zonnestelsel en heelal* | *Astrofysica*, werkblad opdracht 53.

**Broeikaseffect** – *Newton 6v* (4<sup>e</sup> druk), hoofdstuk 13 *Zonnestelsel en heelal* | *Astrofysica*, keuzeonderwerp 1.

**Druk en temperatuur in sterren** – *Newton 6v* (4<sup>e</sup> druk), hoofdstuk 13 *Zonnestelsel en heelal* | *Astrofysica*, keuzeonderwerp 4.